EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

SFB 833 Bedeutungskonstitution

Kompaktkurs

Datenanalyse

Projekt Z2

Tübingen, Mittwoch, 18. und 20. März 2015

Messen und Skalen

Relativ (Relationensystem): Menge A von Objekten und eine oder mehrere Relationen $R_1, \ldots, R_n$, mit denen die Beziehungen der Objekte untereinander charakterisiert wird

$$\langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$$

Empirisches Relativ: Menge A von Objekten des Untersuchungsgegenstands und eine (oder mehrere) interessierende Relationen $R_1, \ldots, R_n$, zwischen (Eigenschaften von) ihnen

Numerisches Relativ: Menge R der reellen Zahlen und eine oder mehrere gültige Relationen $S_1, \ldots, S_n$, zwischen ihnen, z.B. gleich/ungleich ($=, \neq$) oder größer/kleiner-als ($<, >$)

Messen und Skalen

Messen: homomorphe Abbildung von einem empirischen Relativs in ein numerisches Relativ

Eine Abbildung ist z.B. dann homomorph, wenn für alle Paare a, b $\in$ A und Messwerte (bzw. Skalenwerte) φ(a), φ(b) $\in$ R gilt:

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$$

Skala: empirisches Relativ, numerisches Relativ plus homomorphe Abbildungsfunktion

➡ beantwortet die Frage, welche Relationen im numerischen Relativ gültige Relationen sind

Messen und Skalen

Nominalskala (klassifikatorische Messstruktur)

gültige Relation im empirischen Relativ: Äquivalenz $\sim$

- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b \wedge b \sim c \rightarrow a \sim c$ Transitivität

$$a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

gültige Relation im numerischen Relativ: $=$, $\neq$

Beispiel: Satz ist grammatisch versus ungrammatisch

Messen und Skalen

Ordinalskala bzw. **Rangskala**

gültige Relation im empirischen Relativ: schwache Ordnungsrelation $\succcurlyeq$

- $a \succcurlyeq b \vee b \succcurlyeq a$ Konnexität
- $a \succcurlyeq b \wedge a \succcurlyeq b \rightarrow a \succcurlyeq b$ Transitivität

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$$

gültige Relation im numerischen Relativ: <, =, >

Beispiel: Satz ist akzeptabler als, ebenso akzeptabel wie, weniger akzeptabel als ein Referenzsatz

Messen und Skalen

Intervallskala

gültige Relation im empirischen Relativ: schwache Ordnungsrelation $\succcurlyeq$ für Differenzen von Paaren von Objekten (verkürzt)

- $ab \succcurlyeq cd \vee cd \succcurlyeq ab$ Konnexität der Differenzen
- $ab \succcurlyeq cd \wedge cd \succcurlyeq ef \rightarrow ab \succcurlyeq ef$ Transitivität der Differenzen

$$ab \succcurlyeq cd \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) \geq \varphi(c) - \varphi(d)$$

gültige Relation im numerischen Relativ: <, =, > für Differenzen

Beispiel: Satz bekommt auf einer Ratingskala zwischen 1 („inakzaptabel“) und 5 („völlig akzeptabel“) einen Wert zugeordnet; Annahme: die Punkte auf der Skala sind gleichabständig

Frage: ist die Annahme gerechtfertigt?

Messen und Skalen

Verhältnisskala

gültige Relation im empirischen Relativ: schwache Ordnungsrelation $\succcurlyeq$ für Verhältnisse von Paaren von Objekten: Skala hat einen Nullpunkt!

- …

Beispiel? Reaktionszeiten

Frage: haben Reaktionszeiten einen Nullpunkt?

Messen und Skalen

Exkurs: haben Reaktionszeiten einen Nullpunkt?

Beispiel: Hypothese über Zugriff auf einen Eintrag im mentalen Lexikon

Test über lexikalische Entscheidungsaufgabe: Stimulus = String (Wort/Non-Wort)

Response: Antwort **JA**-Taste (Wort) oder **NEIN**-Taste (Non-Wort) drücken

AV: Zeit (RT) vom Onset der Stimulusdarbietung bis zur Response für Wort

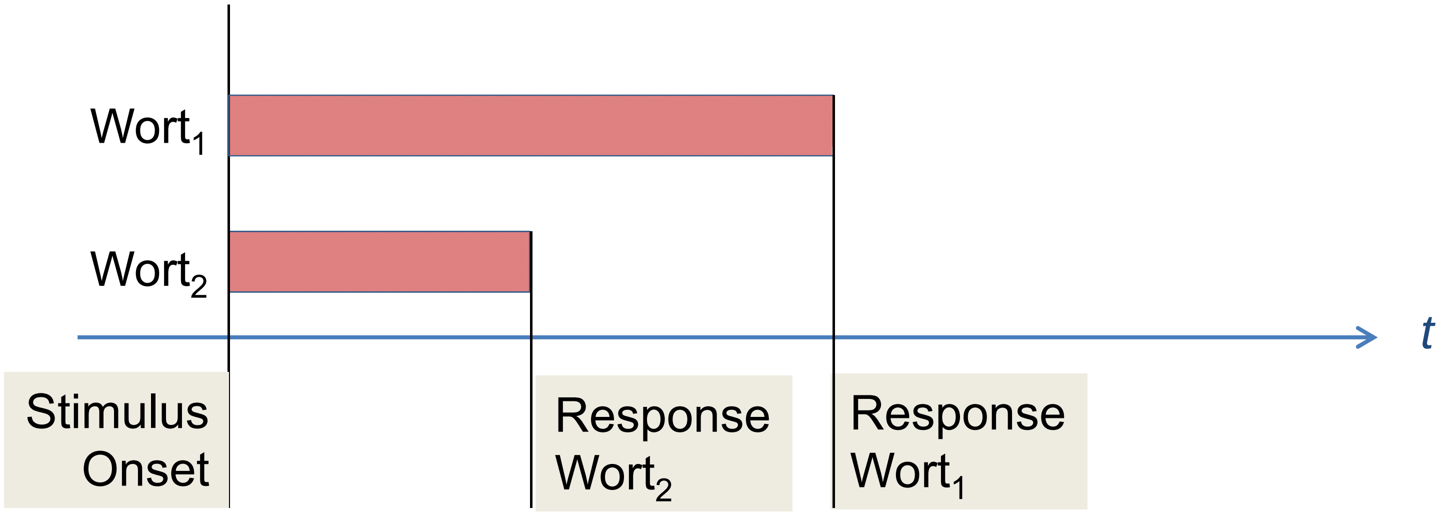
nehmen wir an: $RT(Wort_1) = 2 \cdot RT(Wort_2)$

Ist der Zugriff im mentalen Lexikon auf $Wort_2$ doppelt so schnell wir auf $Wort_1$?

Messen und Skalen

Exkurs: haben Reaktionszeiten einen Nullpunkt?

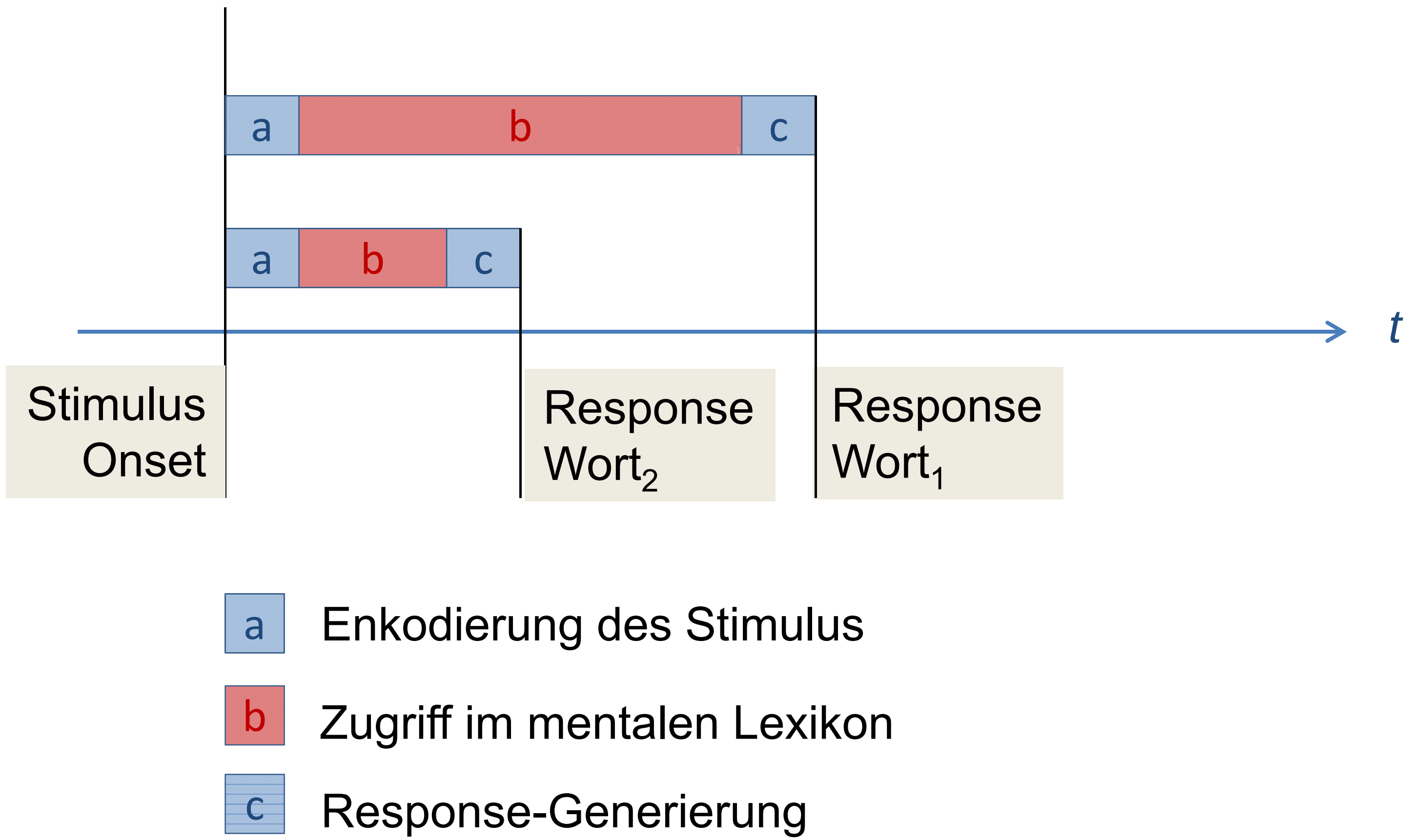
Ist der Zugriff im mentalen Lexikon auf Wort_2 doppelt so schnell wir auf Wort_1?



Messen und Skalen

Exkurs: haben Reaktionszeiten einen Nullpunkt?

Ist der Zugriff im mentalen Lexikon auf Wort_2 doppelt so schnell wir auf Wort_1?



Messen und Skalen

Verhältnisskala

gültige Relation im empirischen Relativ: schwache Ordnungsrelation $\succcurlyeq$ für Verhältnisse von Paaren von Objekten: Skala hat einen Nullpunkt!

- …

Beispiel? Reaktionszeiten

Frage: haben Reaktionszeiten einen Nullpunkt?

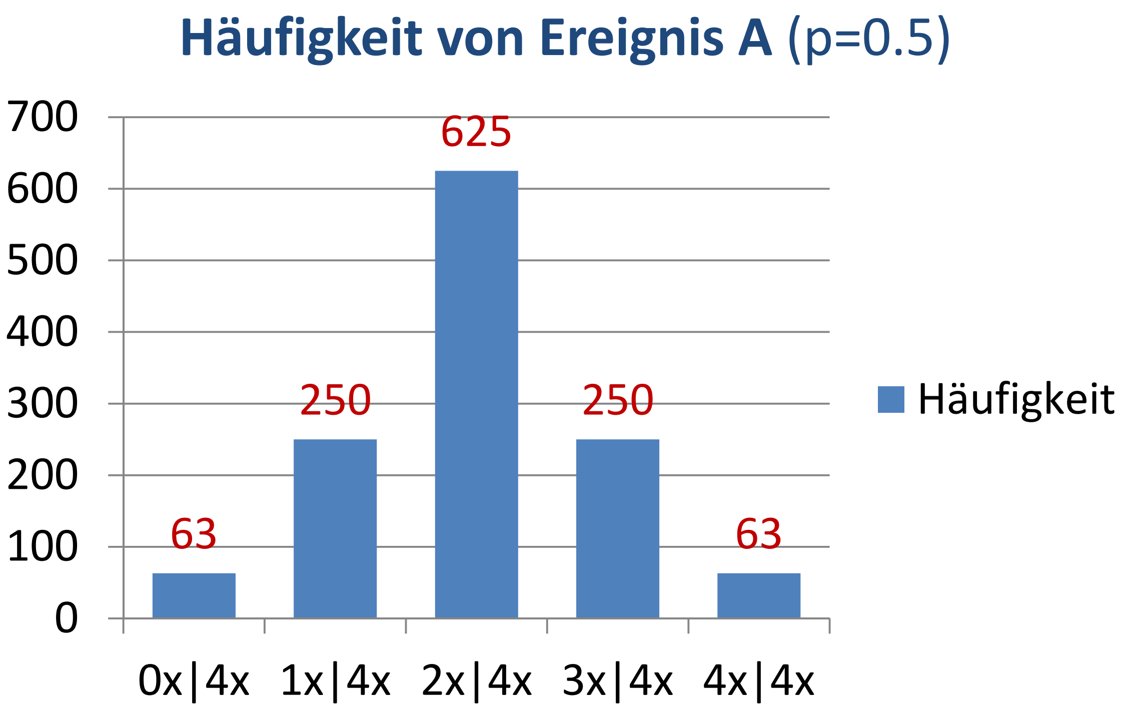
Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Charakterisierung einer Häufigkeitsverteilung durch statistische Kennwerte

- Maße der zentralen Tendenz
- Dispersionsmaße

Beispiel: Binomial-Verteilung bei zwei gleich wahrscheinlichen Ereignissen (n=4)

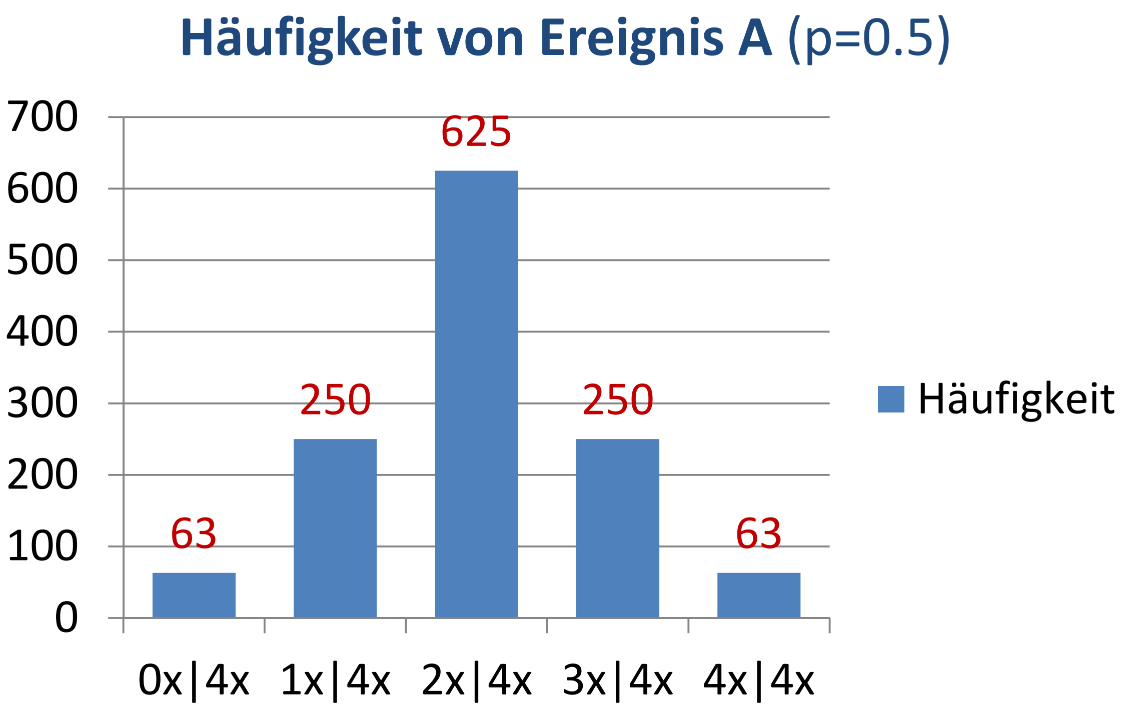


Achtung: tatsächlich handelt es sich um erwartete, nicht um beobachtete Häufigkeiten

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

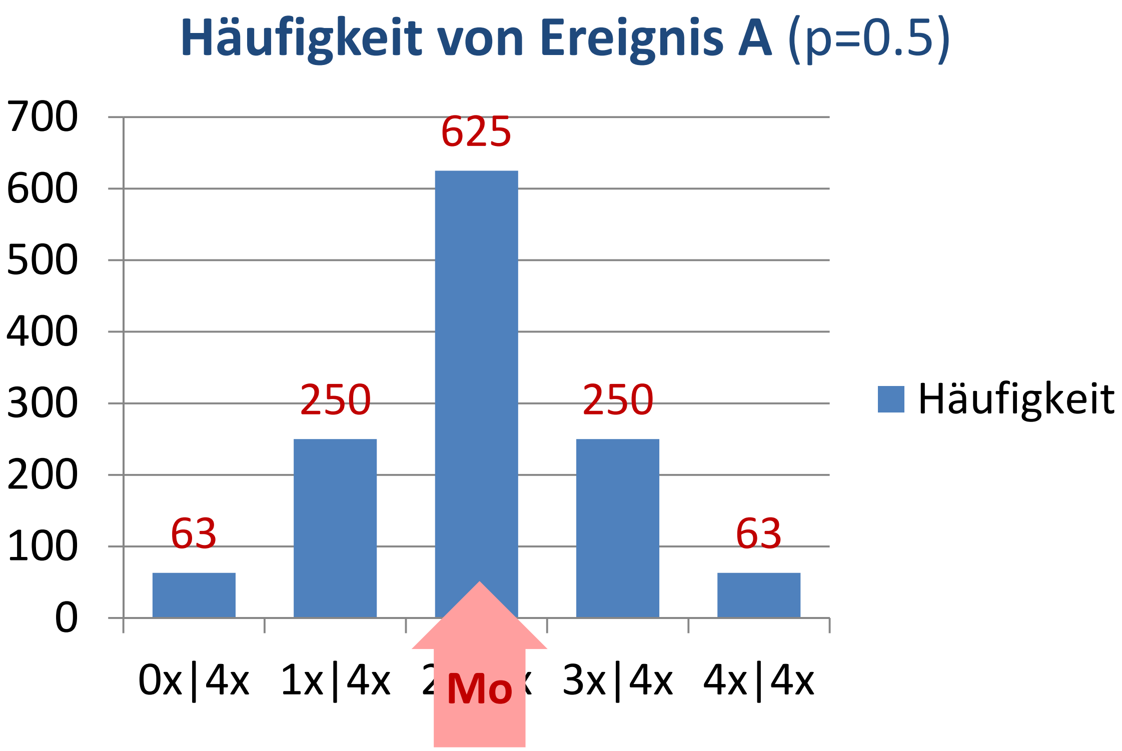
- Modalwert (Mo)
- Median (Md)
- Arithmetisches Mittel (AM; Mittelwert)



Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

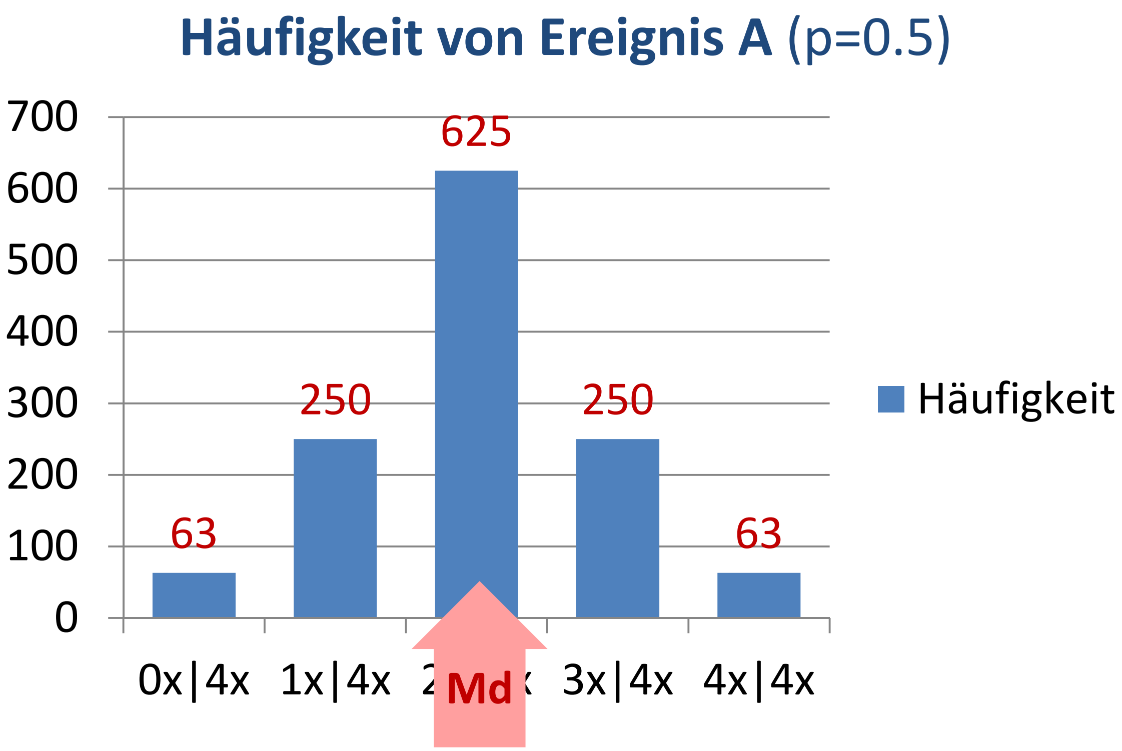
- Modalwert (Mo) = Kategorie, die am häufigsten vorkommt; hier: 2x|4x
  anwendbar auf nominalskalierte Daten



Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

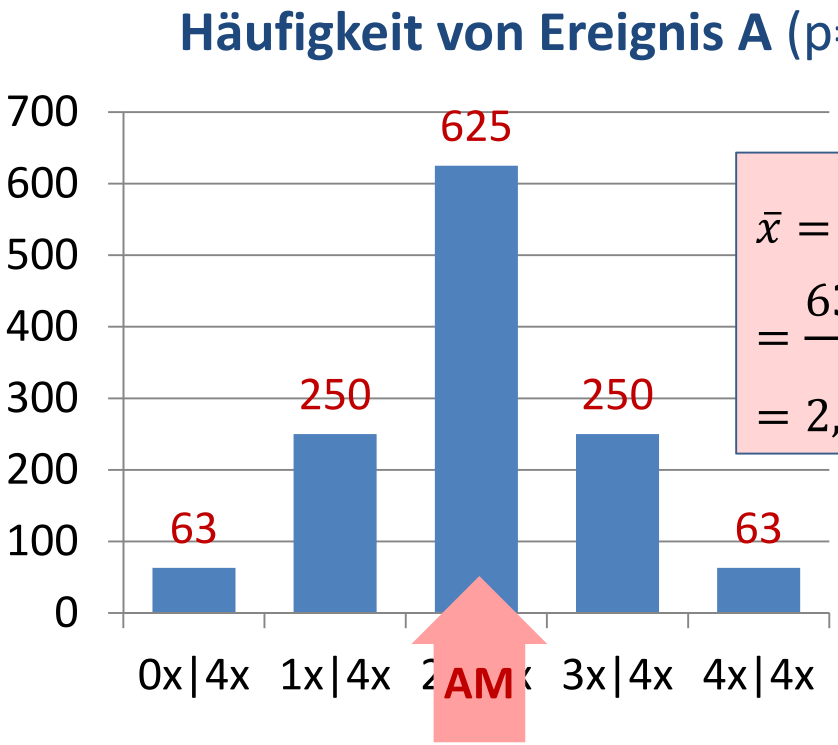
- Median (Md) = Wert, der bei Rangreihung aller Werte in der Mitte liegt;
  N = 1251; hier: der 626. Wert liegt in Kategorie 2x|4x
  anwendbar auf ordinalskalierte Daten



Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

- Arithmetisches Mittel (AM) = Wert, dessen aufsummierten quadrierten Abweichungen ein Minimum ein Minimum ergibt
  anwendbar auf intervallskalierte Daten



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{63 \cdot 0 + 250 \cdot 1 + 625 \cdot 2 + 250 \cdot 3 + 63 \cdot 4}{1251}$$

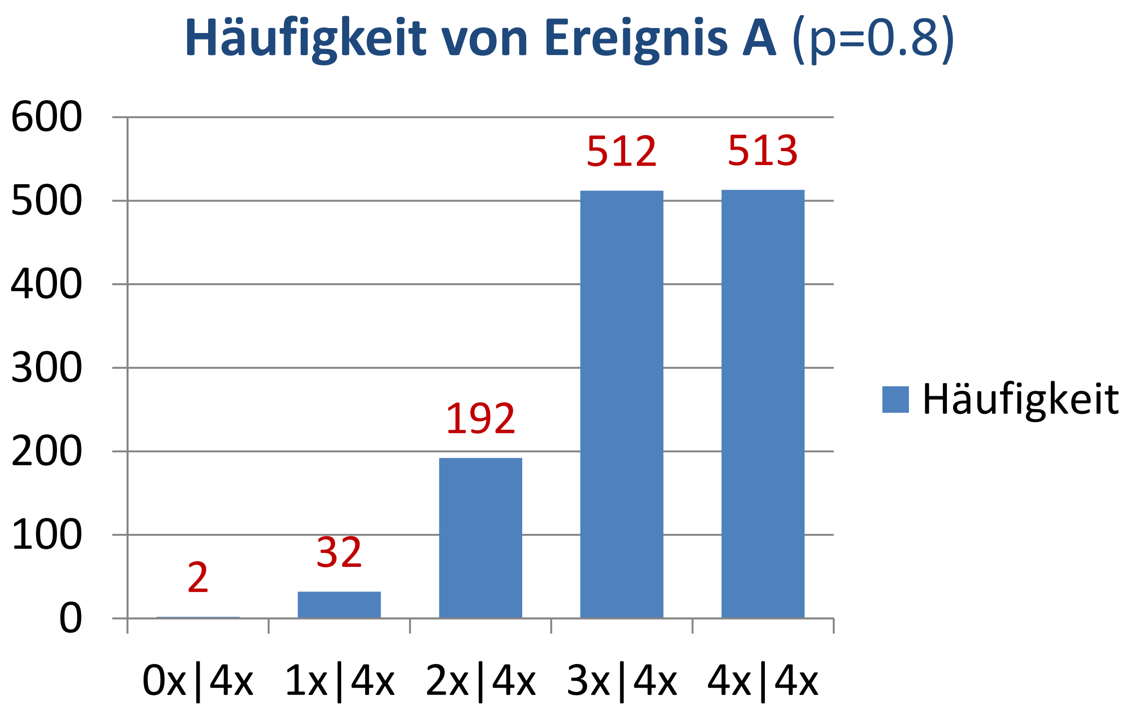
$$= 2{,}0$$

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Charakterisierung einer Häufigkeitsverteilung durch statistische Kennwerte

- Maße der zentralen Tendenz
- Dispersionsmaße

Bsp.: Binomial-Verteilung bei zwei ungleich wahrscheinlichen Ereignissen (n=4)

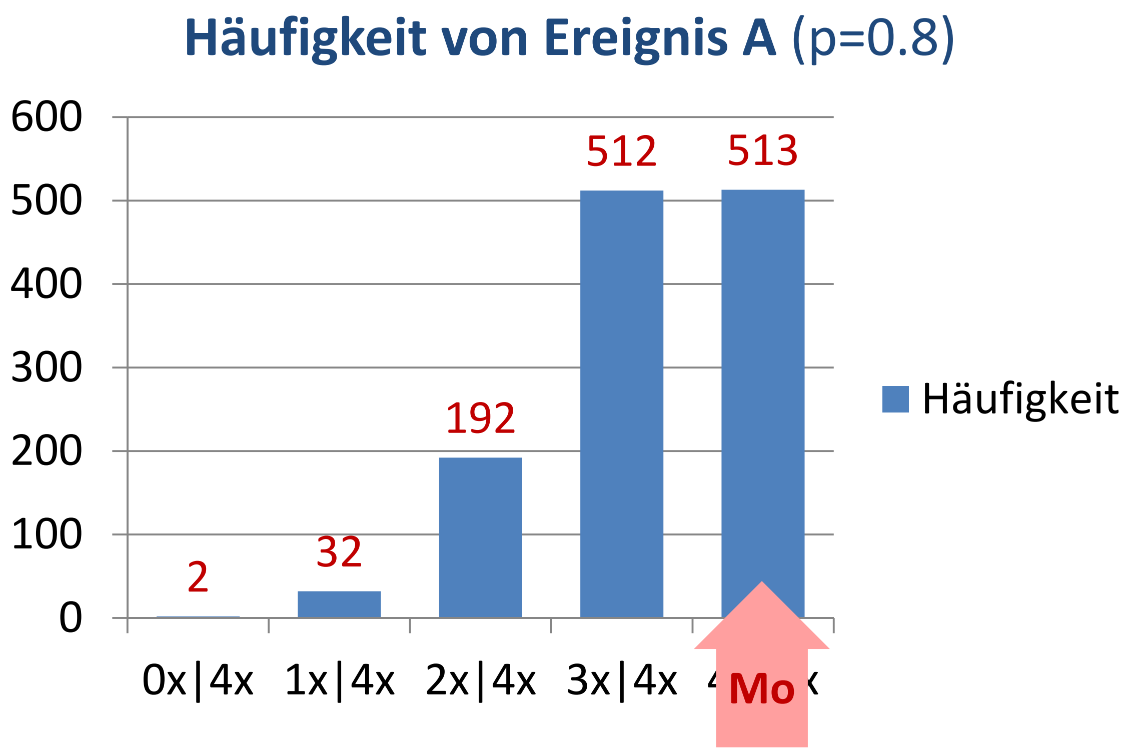


Achtung: tatsächlich handelt es sich um erwartete, nicht um beobachtete Häufigkeiten

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

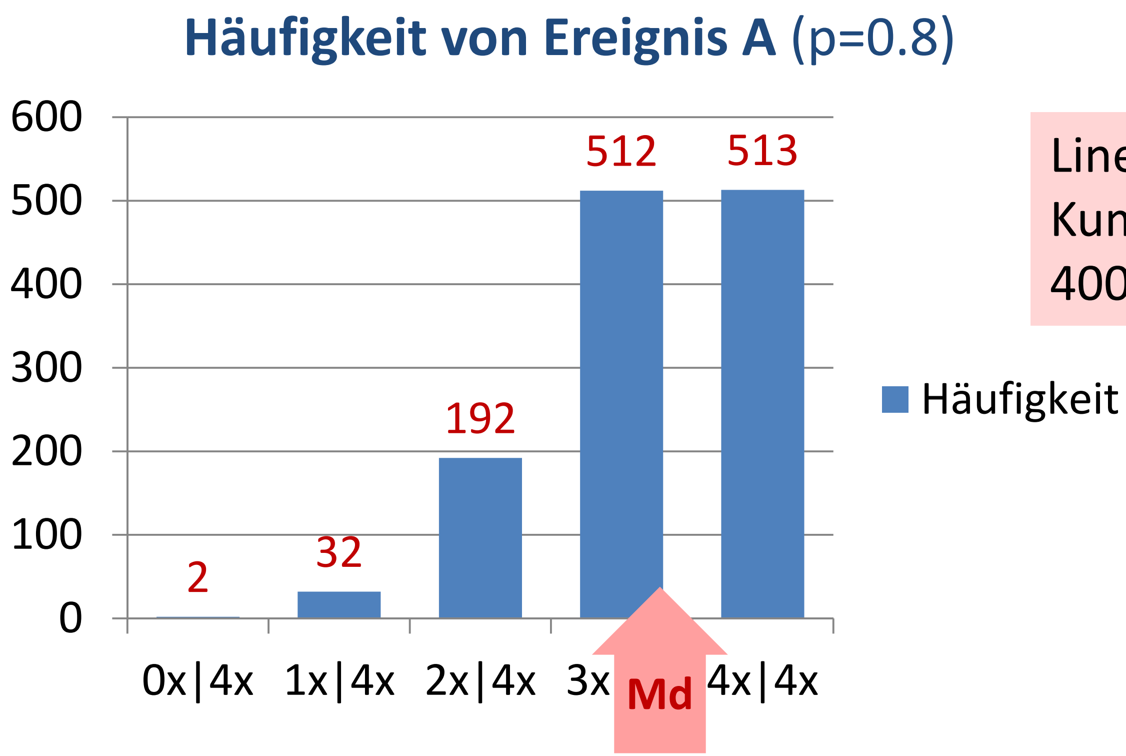
- Modalwert (Mo) = Kategorie, die am häufigsten vorkommt; hier: 4x|4x
  anwendbar auf nominalskalierte Daten



Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

- Median (Md) = Wert, der bei Rangreihung aller Werte in der Mitte liegt;
  N = 1251; hier: der 626. Wert liegt in Kategorie 3x|4x
  anwendbar auf ordinalskalierte Daten



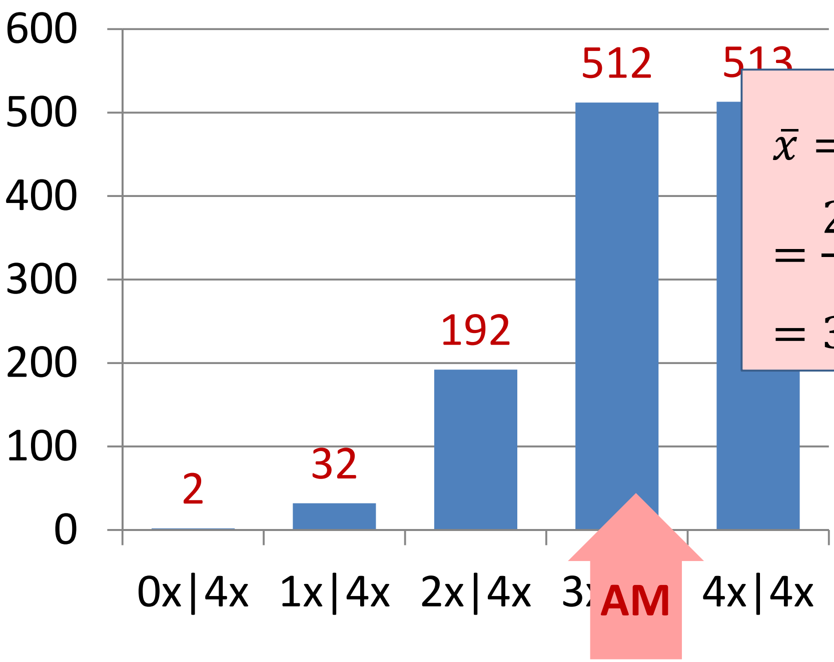
Linear interpolierter Md = 3.28
Kum. Häufigkeit bis 2x|4x: 226
400 aus 512 bis 626

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz

- Arithmetisches Mittel (AM) = Wert, dessen aufsummierten quadrierten Abweichungen ein Minimum ein Minimum ergibt
  anwendbar auf intervallskalierte Daten

Häufigkeit von Ereignis A (p=0.8)



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

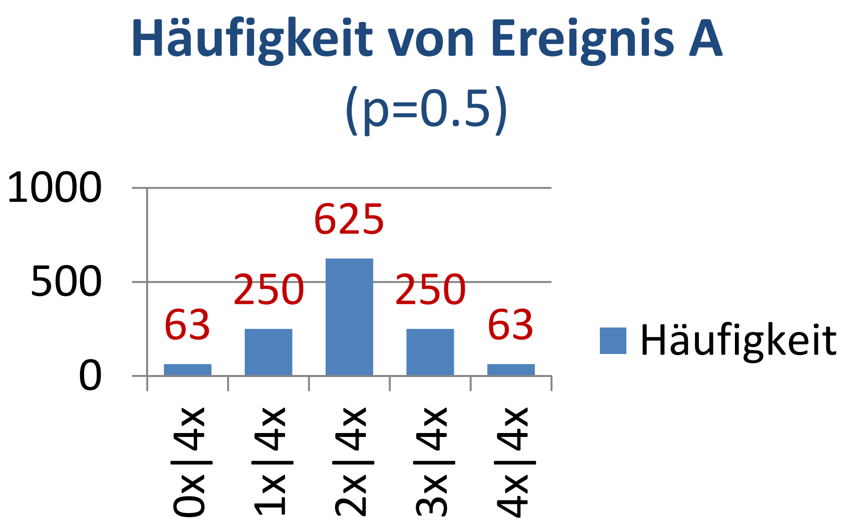
$$= \frac{2 \cdot 0 + 32 \cdot 1 + 192 \cdot 2 + 512 \cdot 3 + 513 \cdot 4}{1251}$$

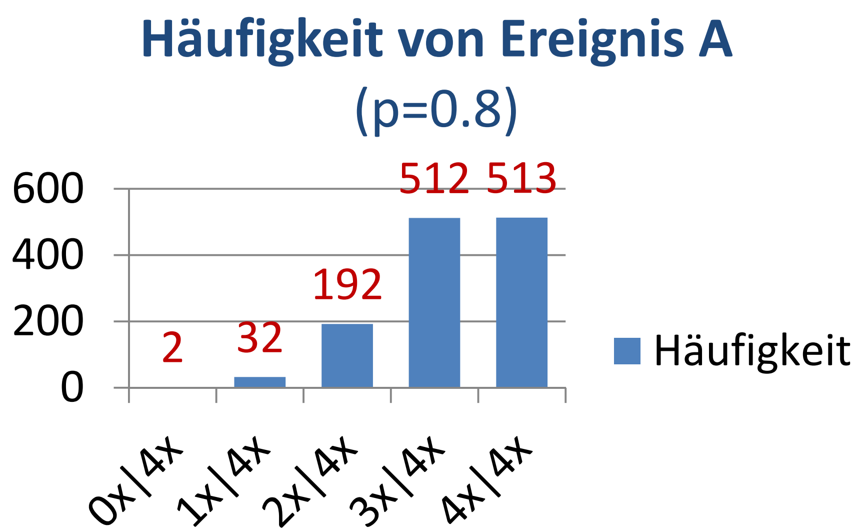
$$= 3{,}2$$

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Maße der zentralen Tendenz: Zusammenfassung

- Für symmetrische Verteilungen fallen Mo, Md und AM zusammen
- Für asymmetrische Verteilungen (z.B. rechtsgipflig/linksschief) gilt:
  - linear interpolierter Md liegt näher am Mo als AM aufgrund der höheren Gewichtung größerer Abweichungen

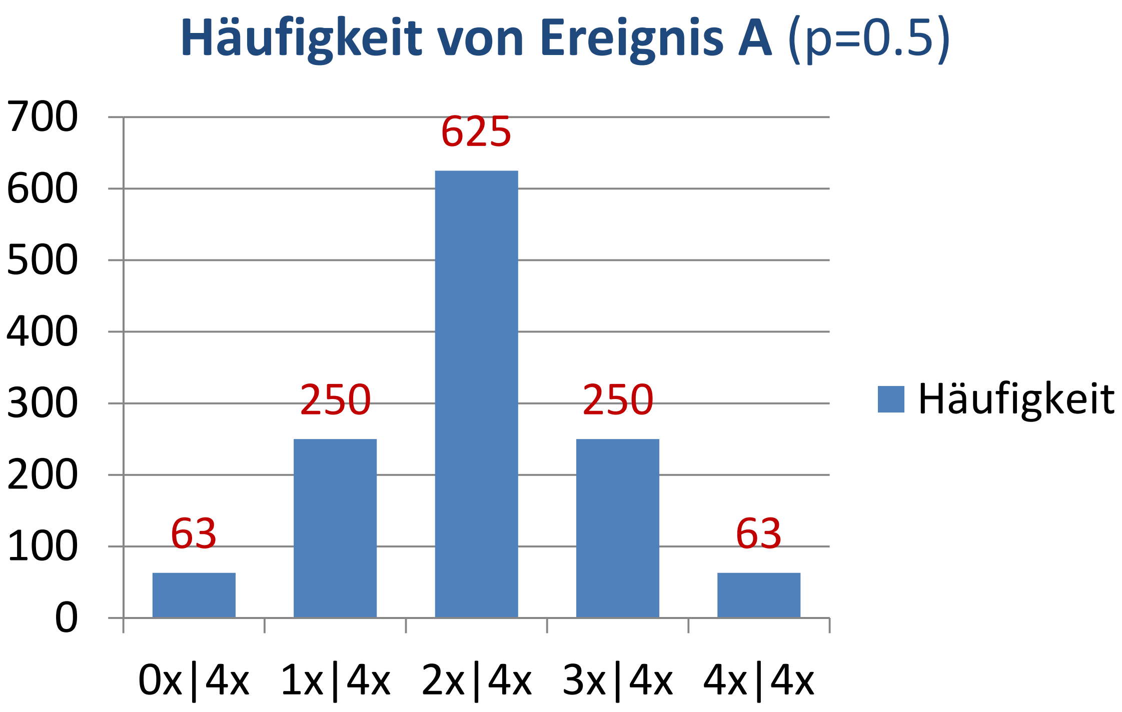




Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Dispersionsmaße

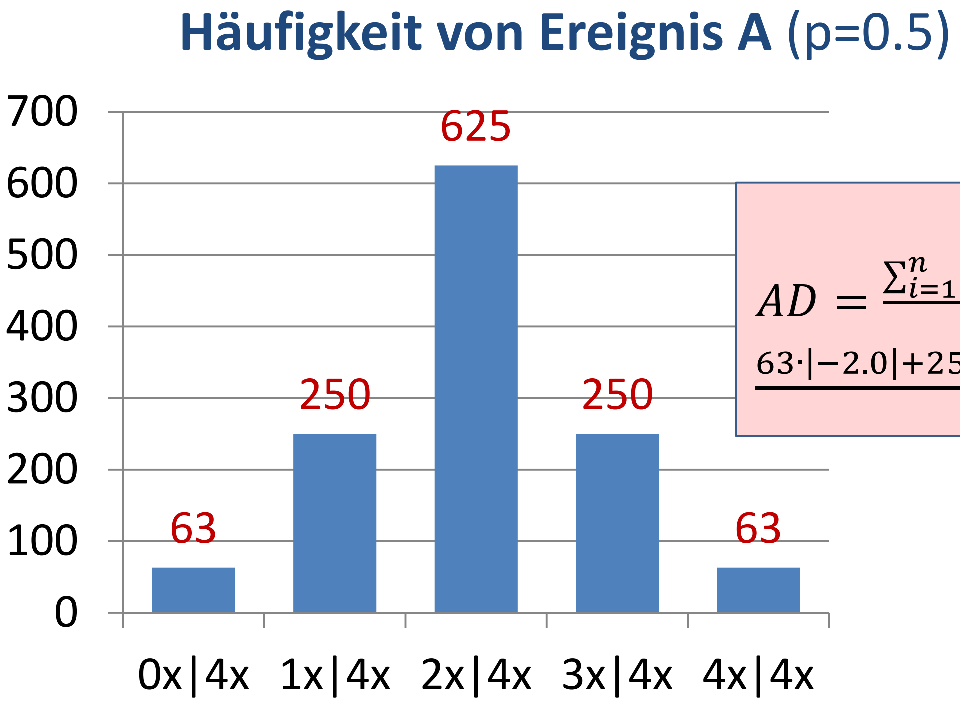
- AD-Streuung (AD = average deviation)
- Varianz und Standardabweichung



Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Dispersionsmaße

- AD-Streuung (AD = average deviation): mittlere Abweichung (Distanz) vom arithmetischen Mittel
  anwendbar auf intervallskalierte Daten

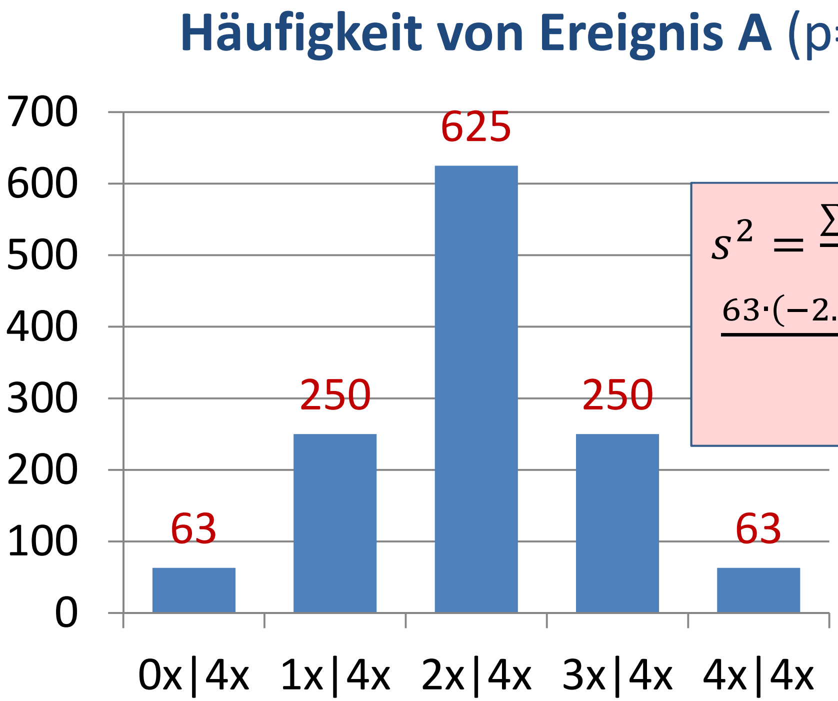


$$AD = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{63 \cdot |-2.0| + 250 \cdot |-1.0| + 250 \cdot |+1.0| + 63 \cdot |+2.0|}{1251} = 0.601$$

Häufigkeitsverteilungen: statistische Kennwerte

Dispersionsmaße

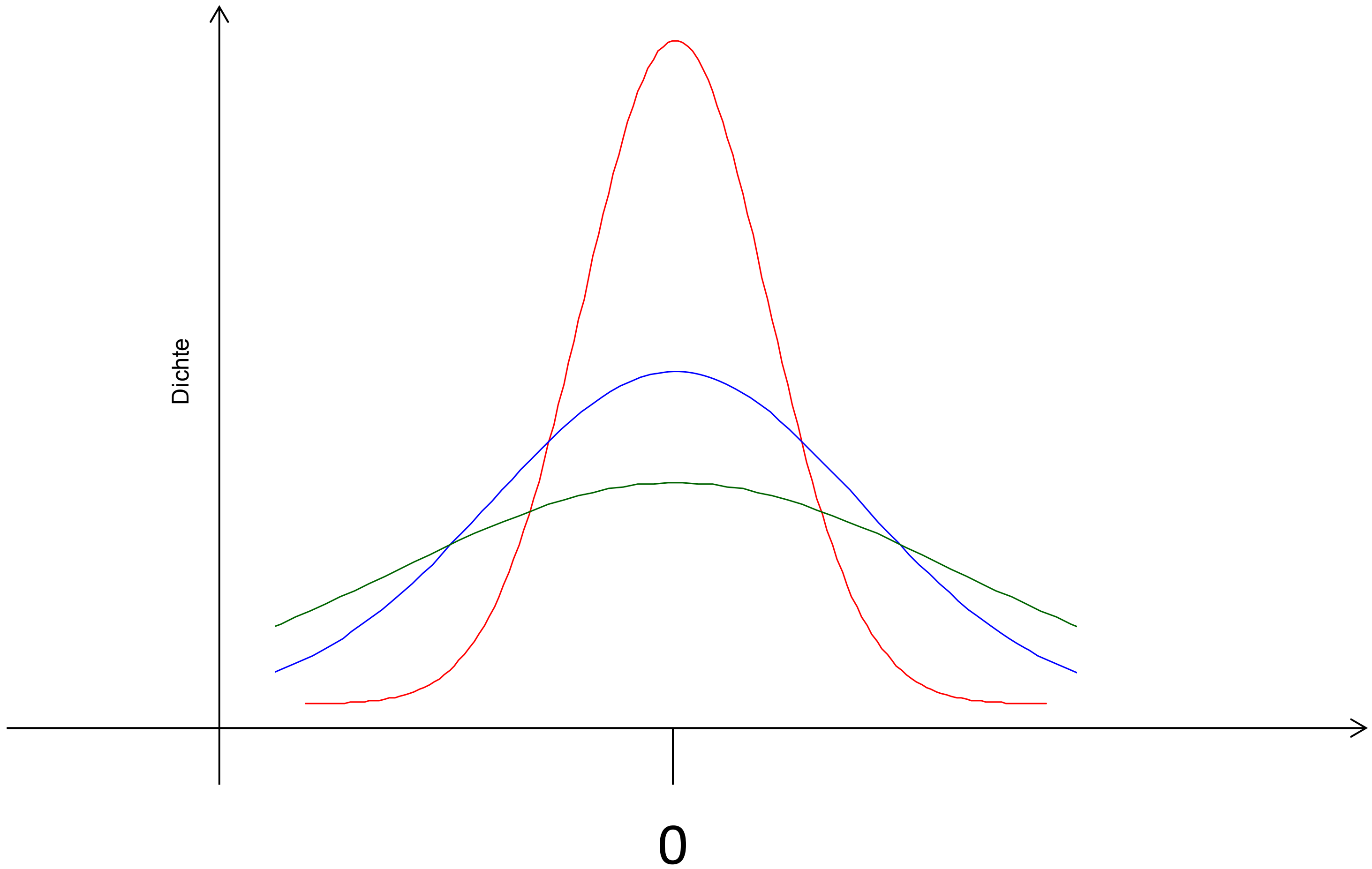
- Varianz s^2 (und Standardabweichung s): mittlere quadrierte Abweichung vom Mittel (und deren Quadratwurzel)
  anwendbar auf intervallskalierte Daten



$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{63\cdot(-2.0)^2+250\cdot(-1.0)^2+250\cdot(+1.0)^2+63\cdot(+2.0)^2}{1251} = 0.803$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.803} = 0.896$$

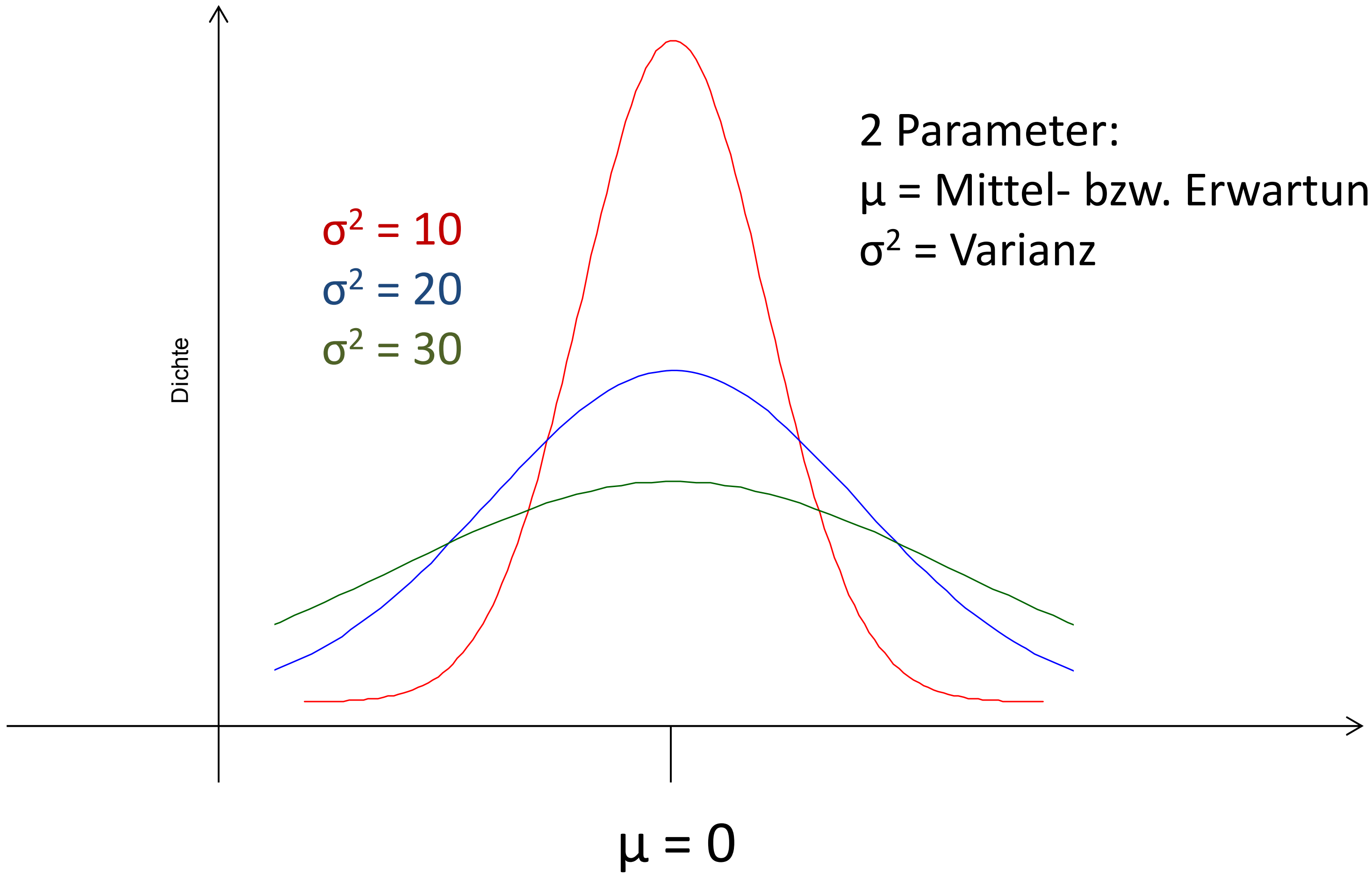
Häufigkeitsverteilungen: Normalverteilung



Häufigkeitsverteilungen: Normalverteilung

Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

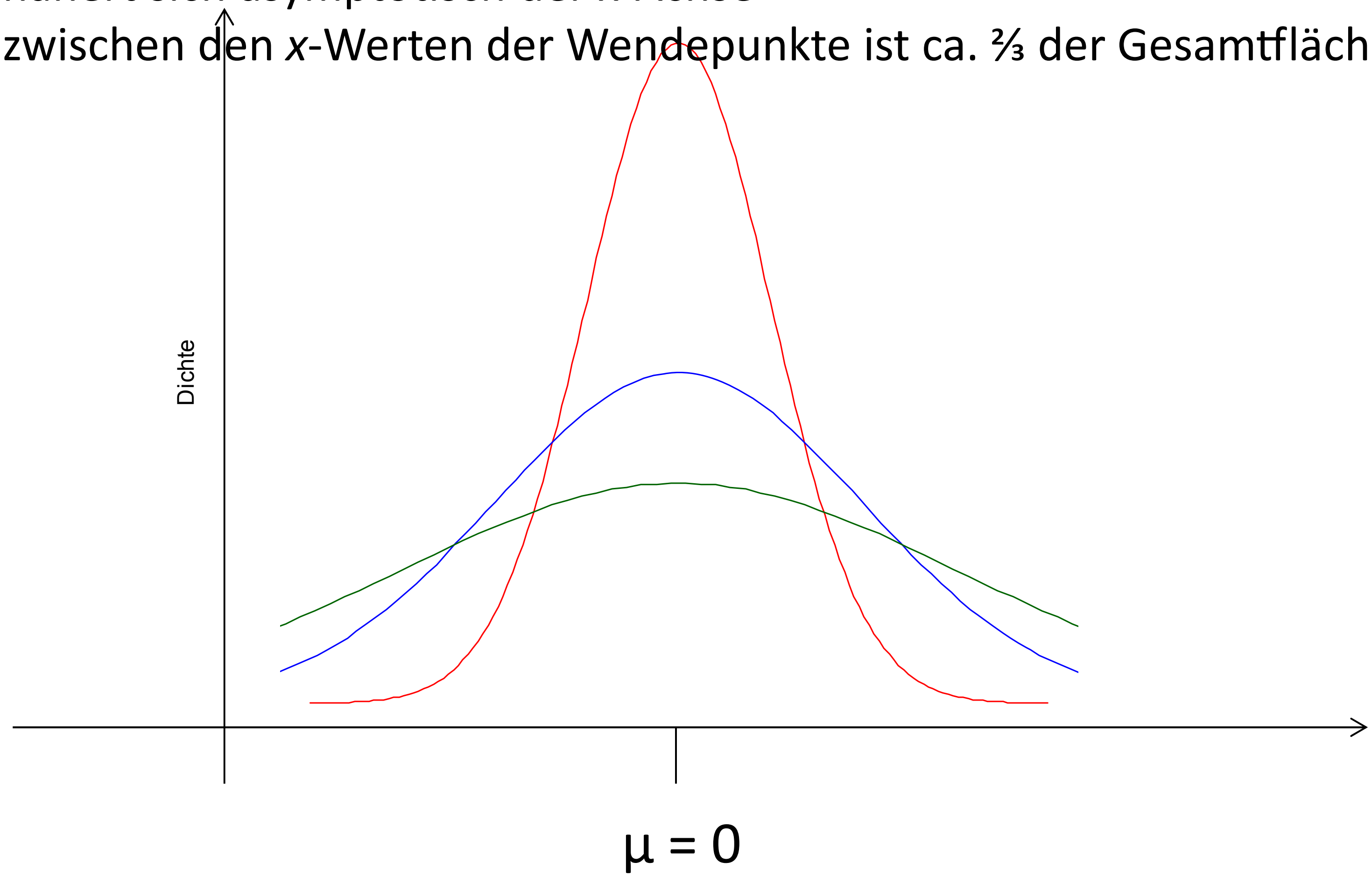


2 Parameter:
μ = Mittel- bzw. Erwartungwert
σ^2 = Varianz

Häufigkeitsverteilungen: Normalverteilung

Eigenschaften von Normalverteilungen:

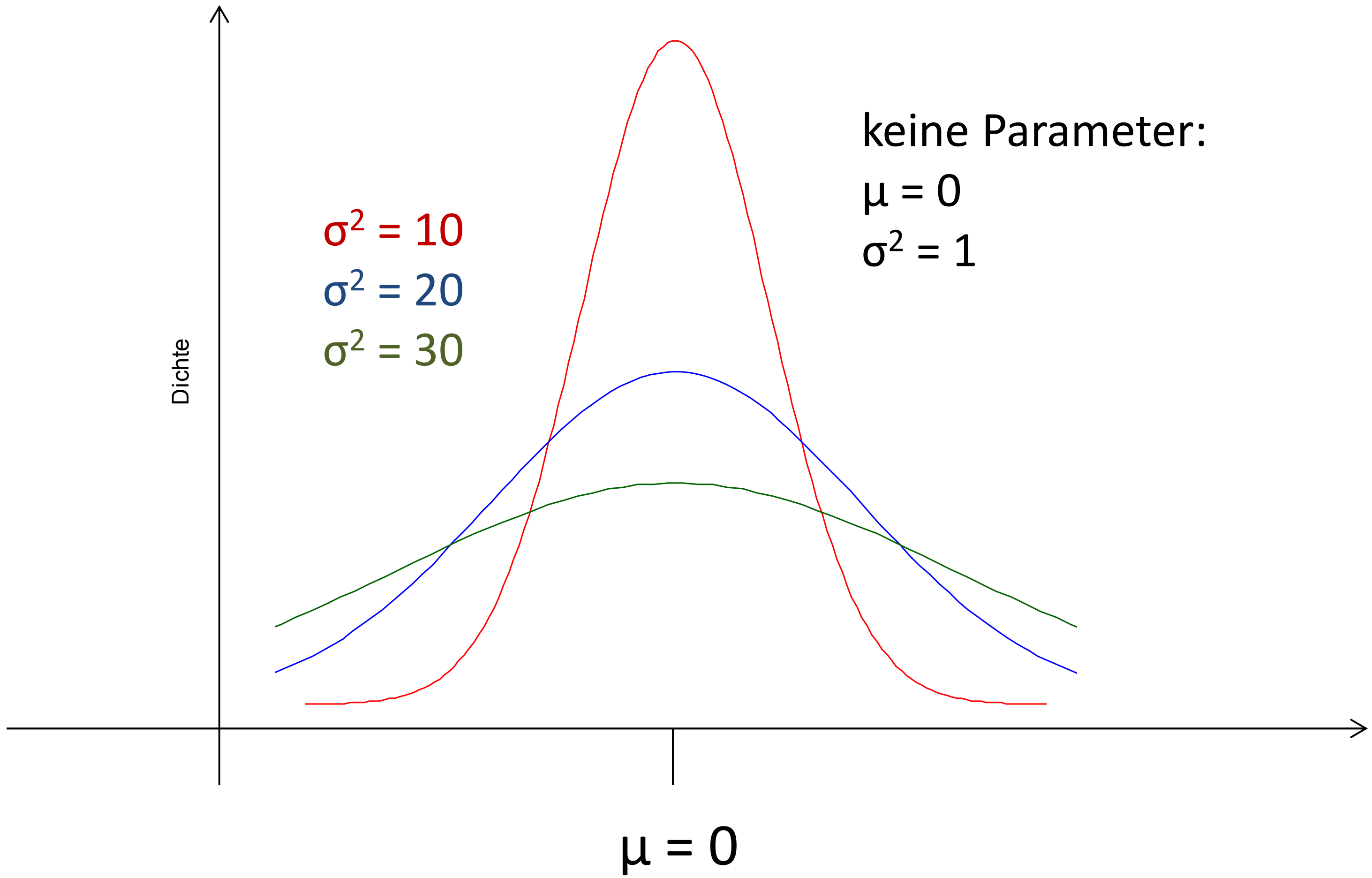
- glockenförmiger Verlauf
- symmetrisch
- nähert sich asymptotisch der x-Achse
- zwischen den *x*-Werten der Wendepunkte ist ca. ⅔ der Gesamtfläche



Häufigkeitsverteilungen: Standard-Normalverteilung

Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung (*z*-Verteilung)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}$$

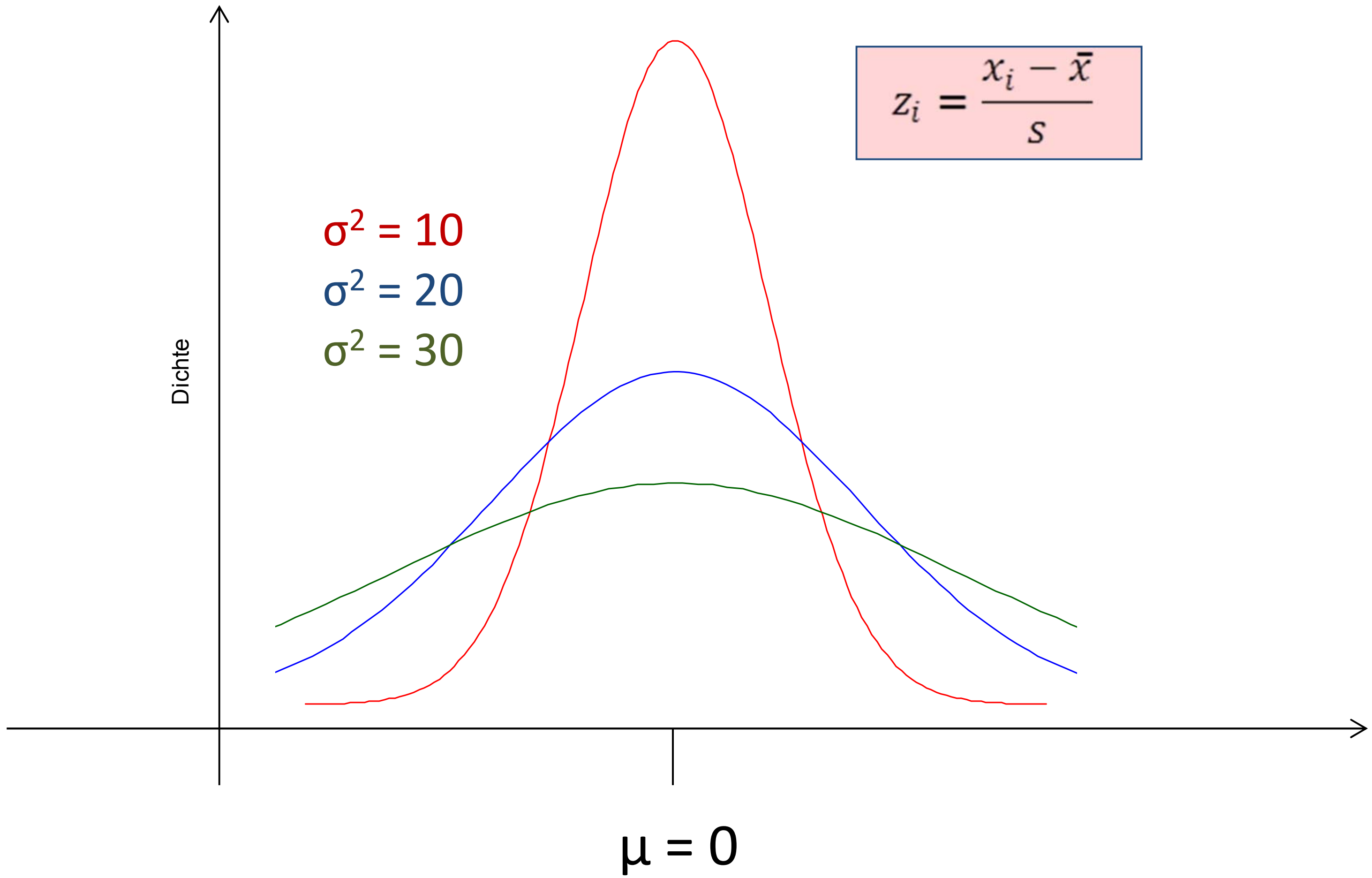


Häufigkeitsverteilungen: Standard-Normalverteilung

Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung (*z*-Verteilung)

Standardisierung von Werten x_i aus beliebiger Normalverteilung durch *z*-Transformation:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$



Häufigkeitsverteilungen: Normalverteilung

Bedeutung von Normalverteilungen:

- Beobachteter Wert aus einer Population mit dem Erwartungswert μ setzt sich zusammen aus den Erwartungswert und einem Fehler ε

$$x_i = \mu + \varepsilon$$

- Annahme: ε ist normalverteilt
- Schlussfolgerung: für n Beobachtungen aus der Population sind die Beobachtungen für $n \rightarrow \infty$ normalverteilt

Probabilistische Unterschiedshypothese H1

H1: Ein Satz, der Bedingung A erfüllt, ist akzeptabler als ein entsprechender Satz, der Bedingung B erfüllt

Bsp.: Bedingung A: SVO-Abfolge; Bedingung B: OVS-Abfolge

„entsprechender Satz“ = minimales Paar, d.h., übereinstimmende Lexikalisierung

z.B.:

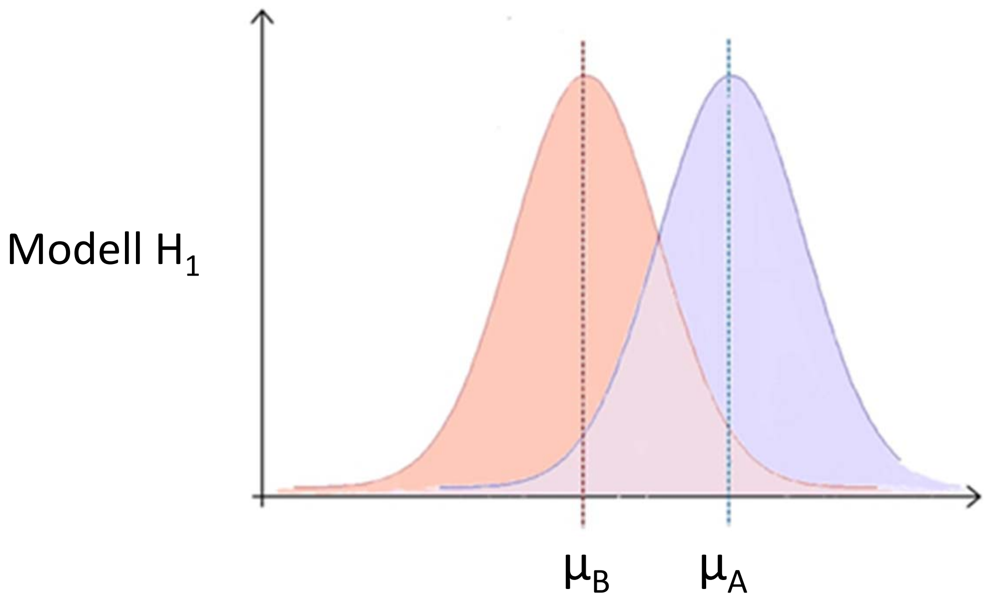
Bedingung A:	Der Trainer beleidigte den Schiedsrichter.
Bedingung B:	Den Schiedsrichter beleidigte der Trainer.

H1 behauptet, dass einander entsprechende Sätze aus Bedingung A und Bedingung B aus verschiedenen Populationen stammen mit

$$\mu_A > \mu_B$$

Probabilistische Unterschiedshypothese H1

H1: Ein Satz, der Bedingung A erfüllt, ist akzeptabler als ein entsprechender Satz, der Bedingung B erfüllt

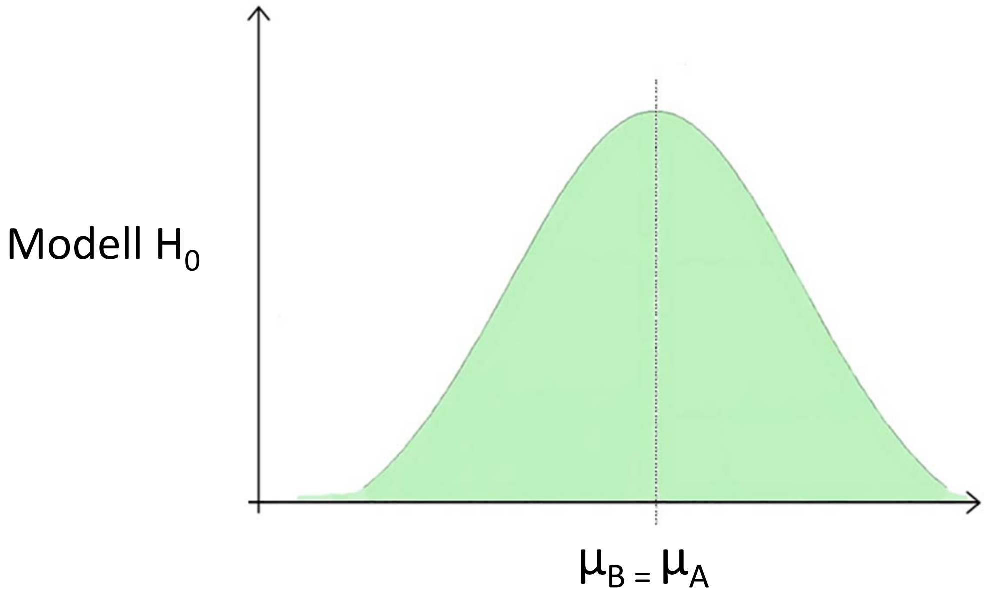


- H1 ist eine gerichtete bzw. einseitig formulierte Hypothese
- H1 formuliert keine Annahme über die Distanz zwischen µA und µB
  → keine Annahme über die zu erwartende Effektstärke
- H1 formuliert keine Annahmen über die Varianz der Verteilungen

→ Populationsparameter müssen aus Stichprobe(n) geschätzt werden

Probabilistische Unterschiedshypothese H1

H0: Ein Satz, der Bedingung A erfüllt, ist ebenso akzeptabel wie ein entsprechender Satz, der Bedingung B erfüllt



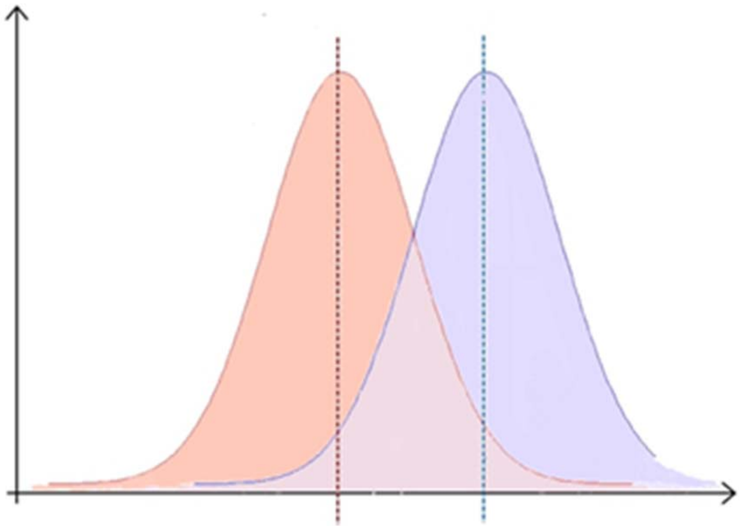
H0 behauptet, dass einander entsprechende Sätze aus Bedingung A und Bedingung B aus derselben Population stammen mit

$$\mu_A = \mu_B$$

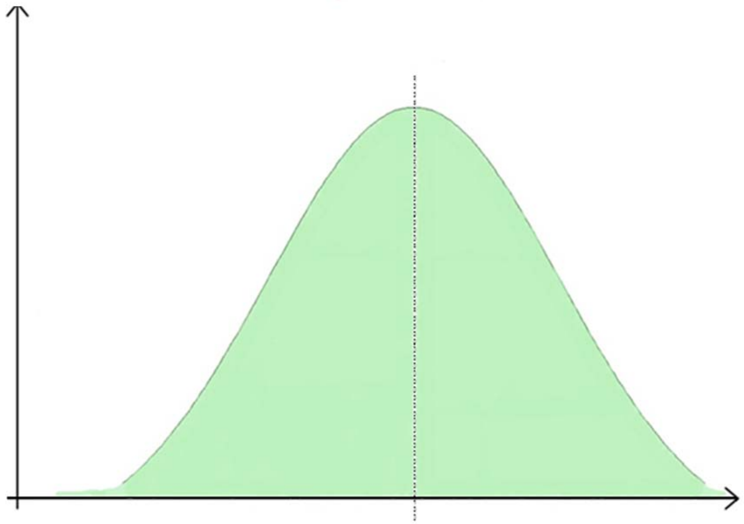
Probabilistische Unterschiedshypothese H1

Inferenzstatistik: können wir H0 verwerfen?

Modell H_1

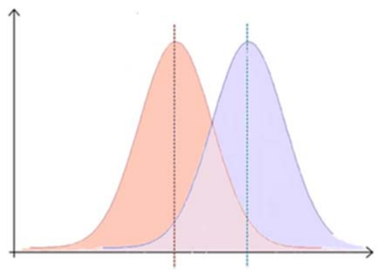
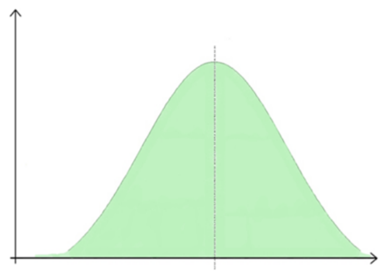


Modell H_0

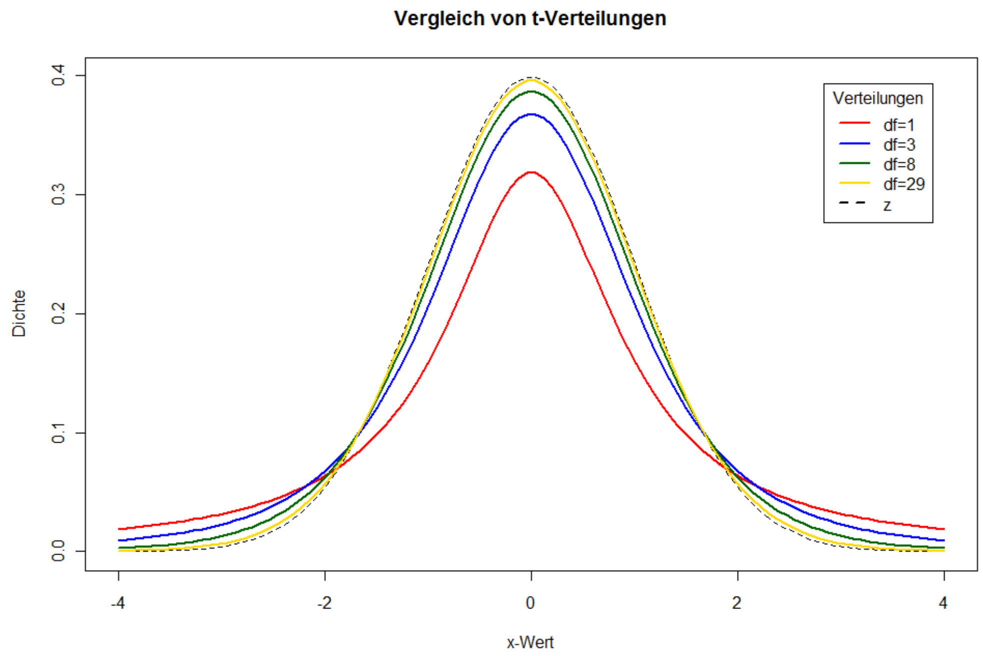


Probabilistische Unterschiedshypothese H1

Inferenzstatistik: minimiere α-Fehler
Entscheidung für H1 gdw. α-Fehler < 5%

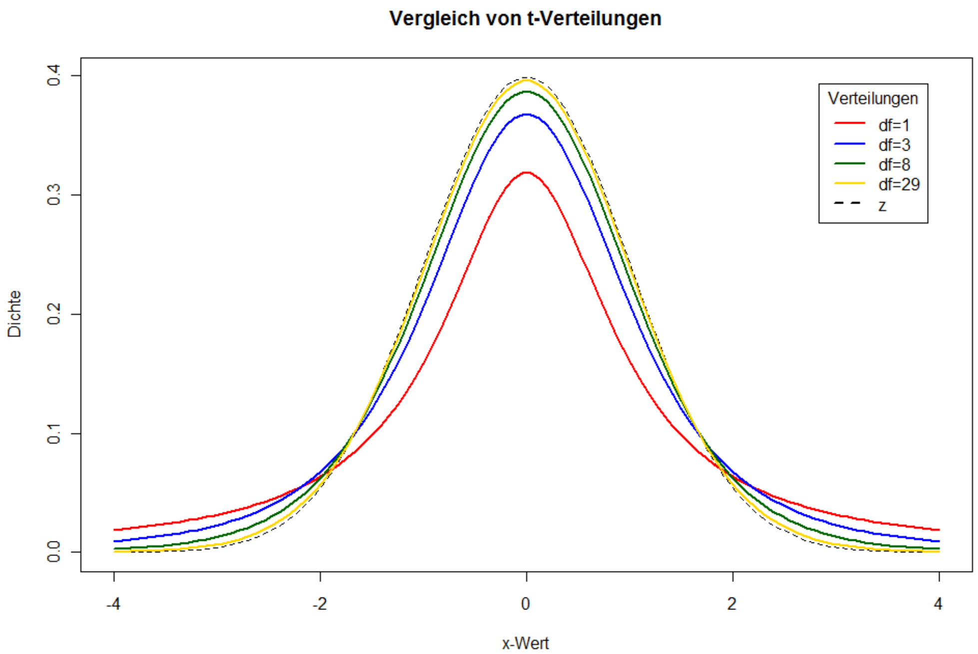
		Es gilt	
			
Entscheidung für	Modell H_1	HIT	**α-Fehler**
	Modell H_0	β-Fehler	CORRECT REJECTION

(Student's) *t*-Verteilung



t-Verteilung mit n – 1 Freiheitsgraden (degrees of freedom: *df*) ist die Zufallsverteilung der Mittelwerte von Stichproben des Umfangs *n* aus einer normalverteilten Population mit $\mu = 0$

(Student‘s) *t*-Verteilung



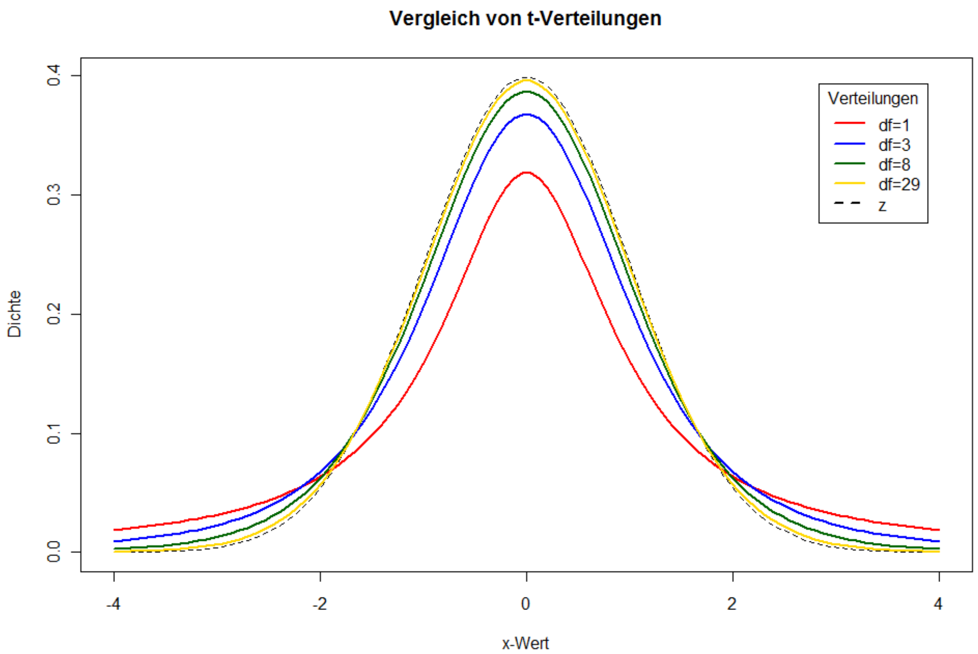
Eigenschaften der *t*-Verteilung:

- symmetrisch um 0
- eignet sich zum Vergleich der Mittelwerte zweier Verteilungen
- parametrisch für Freiheitsgrade: $df = n - 1$

  vgl. *F*-Statistik: Zähler-df von t immer 1; df(*t*) = Nenner-df(*F*)
- approximiert Standard-Normalverteilung für $n \rightarrow \infty$

  ab ca. n = 30; Achtung: Standard-Normalverteilung ist parameter-frei!

(Student's) *t*-Verteilung



df 1-seitig df 2-seitig	α = 5% α = 10%	α = 2.5% α = 5%	α = 1% α = 2%	α = 0,5% α = 1%
1	6.314	12.706	31.821	63.657
3	2.353	3.182	4.541	5.841
8	1.860	2.306	2.896	3.355
29	1.699	2.045	2,462	2.756
z	1.645	1.960	2,326	2.576

(Student's) *t*-Verteilung

Grundsätzliches Vorgehen beim *t*-Test:

- Man vergleicht die Mittelwerte von 2 Stichproben oder den Mittelwert von 1 Stichprobe mit dem Mittelwert einer theoretischen Population
- Man bestimmt die Abweichung des Mittelwerts der Stichprobe vom theoretisch begründeten Mittelwert (*t*-Test für eine Stichprobe) oder bestimmt die Abweichung der Mittelwerte der Stichproben durch willkürliche Substraktion einer der beiden Stichprobenwerte vom anderen (*t*-Verteilung symmetrisch): *t*-Test für unabhängige Stichproben
- Man schätzt mittels der verfügbaren Stichproben den Standard-Fehler des Mittelwerts (basierend auf der geschätzten Varianz der Verteilung)
- Man bestimmt mittels *t*-Wert die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert der (2.) Stichprobe aus der *t*-Verteilung stammt (H0-Test)
- Ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert aus derselben Population stammt < 5% erachtet man den Mittelwert-Unterschied als statistisch bedeutsam (signifikant) und nimmst die H1 an

t-Test

t-Test für unabhängige Stichproben

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

t-Test

t-Test für abhängige Stichproben

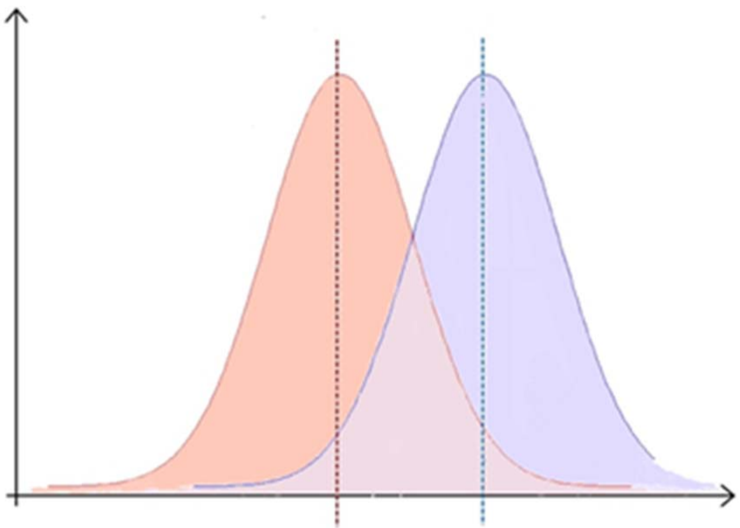
$$t = \frac{\bar{x}_d}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}}$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{\bar{x}_d} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(d_i - \bar{x}_d)^2}{(n-1)}$$

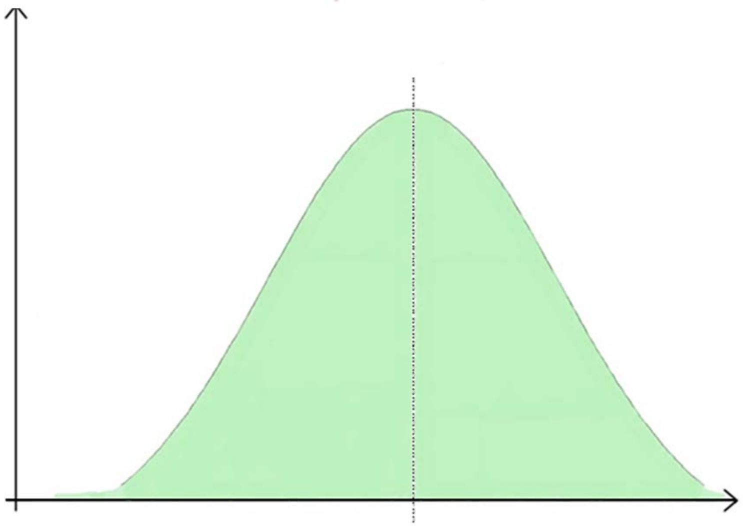
Varianzanalyse

Wird die Fehlervarianz in H0 durch die Annahme von H1 signifikant reduziert?

Modell H_1



Modell H_0



Varianzanalyse (ANOVA)

Beispiel: 1-faktorielle (p Stufen) Varianzanalyse mit Messwiederholung

Varianzanalyse (ANOVA)

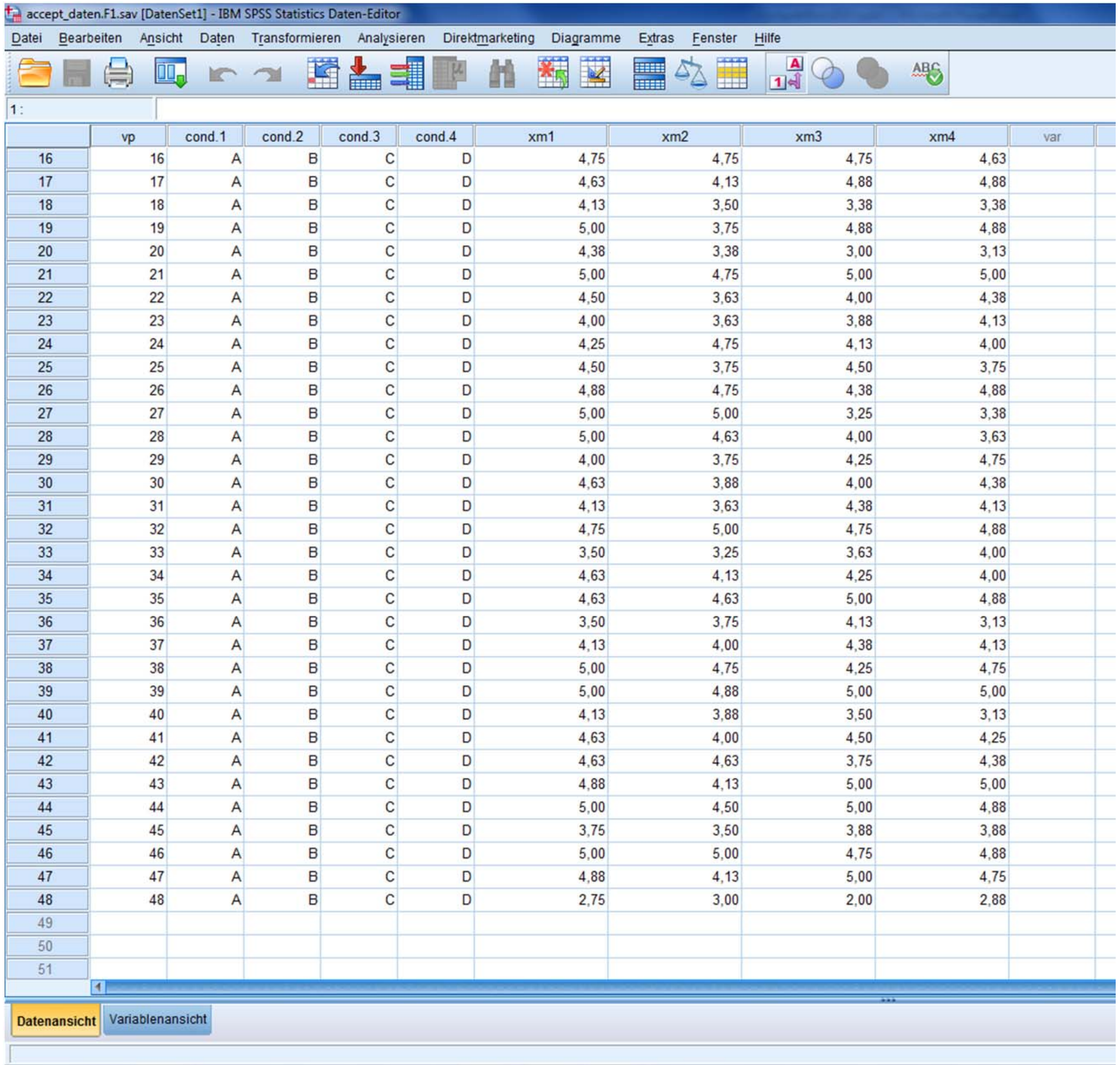
Beispiel: 1-faktorielle (p Stufen) Varianzanalyse mit Messwiederholung

		Faktorstufen					
		1	2	…	i	p	Σ_i
Pbn	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	x_{1p}	P_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	x_{2p}	P_2
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
	m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mi} …	x_{mp}	P_m
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{ni} …	x_{np}	P_n
	Σ_m	A_1	A_2	…	A_i …	A_p	G

p = Anzahl der Faktorstufen
x_{mi} = Messwert von Vp m unter Faktorstufe i
A_i = Summe aller Messwerte unter Faktorstufe i
P_m = Summe aller Messwerte von Vp m
G = Gesamtsumme aller Messwerte x_{mi}

Varianzanalyse (ANOVA)

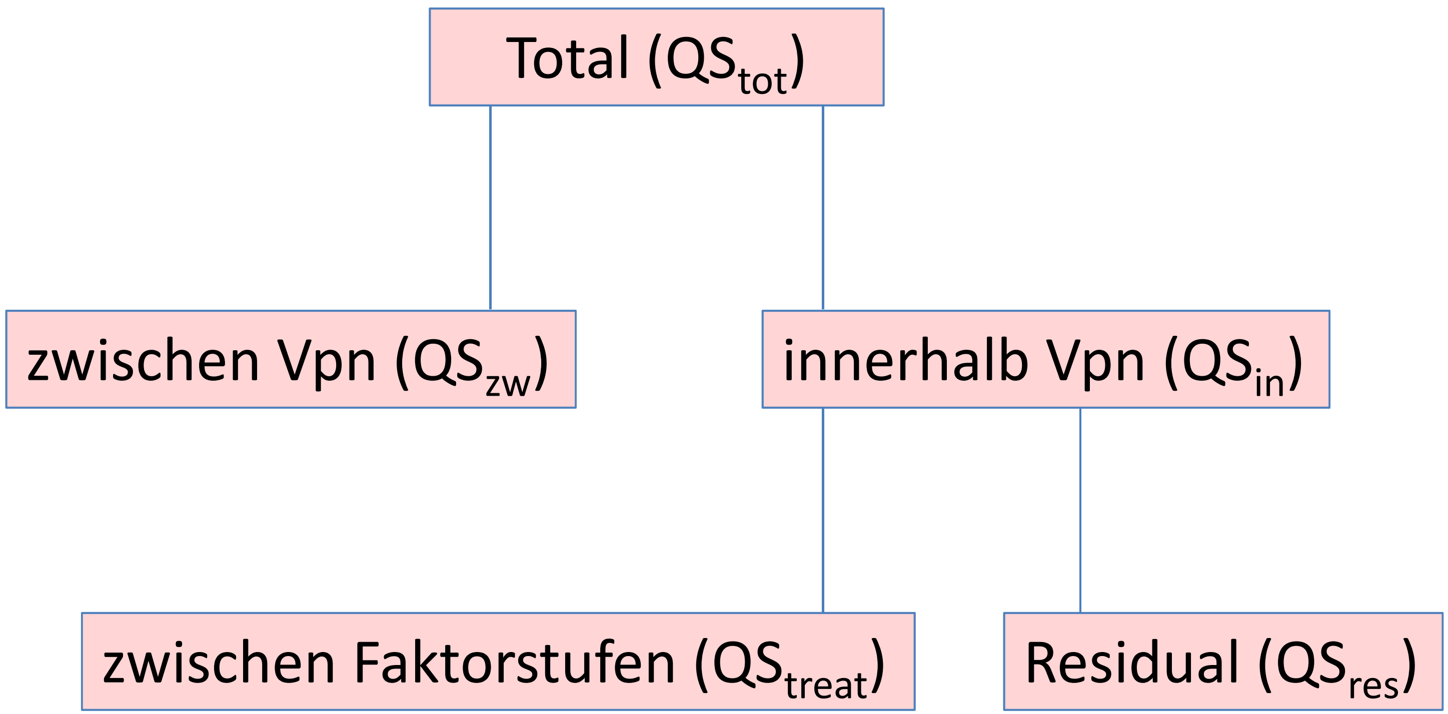
Beispiel: 1-faktorielle (4 Stufen) Varianzanalyse mit Messwiederholung



	vp	cond.1	cond.2	cond.3	cond.4	xm1	xm2	xm3	xm4	var
16	16	A	B	C	D	4,75	4,75	4,75	4,63	
17	17	A	B	C	D	4,63	4,13	4,88	4,88	
18	18	A	B	C	D	4,13	3,50	3,38	3,38	
19	19	A	B	C	D	5,00	3,75	4,88	4,88	
20	20	A	B	C	D	4,38	3,38	3,00	3,13	
21	21	A	B	C	D	5,00	4,75	5,00	5,00	
22	22	A	B	C	D	4,50	3,63	4,00	4,38	
23	23	A	B	C	D	4,00	3,63	3,88	4,13	
24	24	A	B	C	D	4,25	4,75	4,13	4,00	
25	25	A	B	C	D	4,50	3,75	4,50	3,75	
26	26	A	B	C	D	4,88	4,75	4,38	4,88	
27	27	A	B	C	D	5,00	5,00	3,25	3,38	
28	28	A	B	C	D	5,00	4,63	4,00	3,63	
29	29	A	B	C	D	4,00	3,75	4,25	4,75	
30	30	A	B	C	D	4,63	3,88	4,00	4,38	
31	31	A	B	C	D	4,13	3,63	4,38	4,13	
32	32	A	B	C	D	4,75	5,00	4,75	4,88	
33	33	A	B	C	D	3,50	3,25	3,63	4,00	
34	34	A	B	C	D	4,63	4,13	4,25	4,00	
35	35	A	B	C	D	4,63	4,63	5,00	4,88	
36	36	A	B	C	D	3,50	3,75	4,13	3,13	
37	37	A	B	C	D	4,13	4,00	4,38	4,13	
38	38	A	B	C	D	5,00	4,75	4,25	4,75	
39	39	A	B	C	D	5,00	4,88	5,00	5,00	
40	40	A	B	C	D	4,13	3,88	3,50	3,13	
41	41	A	B	C	D	4,63	4,00	4,50	4,25	
42	42	A	B	C	D	4,63	4,63	3,75	4,38	
43	43	A	B	C	D	4,88	4,13	5,00	5,00	
44	44	A	B	C	D	5,00	4,50	5,00	4,88	
45	45	A	B	C	D	3,75	3,50	3,88	3,88	
46	46	A	B	C	D	5,00	5,00	4,75	4,88	
47	47	A	B	C	D	4,88	4,13	5,00	4,75	
48	48	A	B	C	D	2,75	3,00	2,00	2,88	
49										
50										
51										

Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht



Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

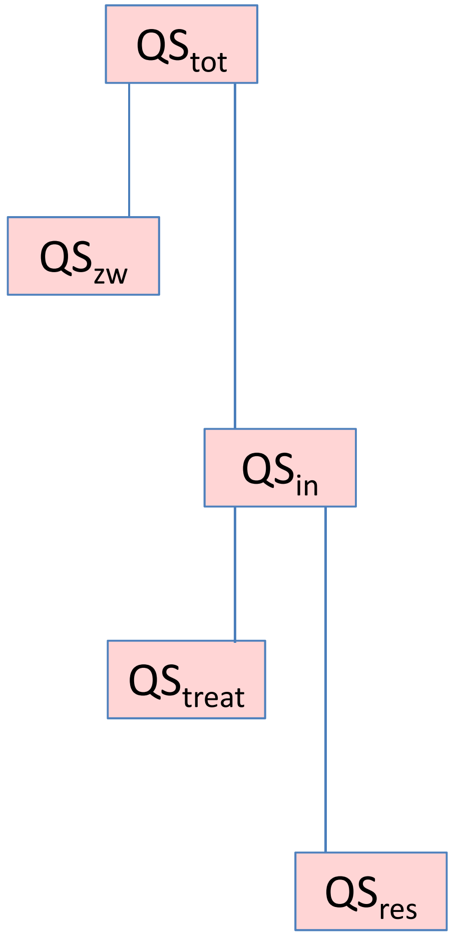
$$QS_{tot} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{G})^2$$

$$QS_{zw} = p \cdot \sum_m (\bar{P}_m - \bar{G})^2$$

$$QS_{in} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{P}_m)^2$$

$$QS_{treat} = n \cdot \sum_i (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

$$QS_{res} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{A}_i - \bar{P}_m + \bar{G})^2$$



Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

$$\bar{G} = \frac{G}{192} = \frac{815.13}{192} = 4.25$$

$$\bar{A}_1 = \frac{A_1}{48} = \frac{215.50}{48} = 4.90$$

$$\bar{A}_2 = \frac{A_2}{48} = \frac{195.50}{48} = 4.07$$

$$\bar{A}_3 = \frac{A_3}{48} = \frac{202.13}{48} = 4.21$$

$$\bar{A}_4 = \frac{A_4}{48} = \frac{202.00}{48} = 4.21$$

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{4} = \frac{10.75}{4} = 2.69$$

$$\bar{P}_2 = \frac{P_2}{4} = \frac{16.63}{4} = 4.16$$

$$\ldots$$

$$\bar{P}_{48} = \frac{P_{48}}{4} = \frac{10.63}{4} = 2.66$$

		Faktorstufen (p=4)				
		1	2	3	4	Σ_i
Pbn	1	$x_{1\cdot 1}$	$x_{1\cdot 2}$	$x_{1\cdot 3}$	$x_{1\cdot 4}$	$P_1 = 10.75$
n=48	2	$x_{2\cdot 1}$	$x_{2\cdot 2}$	$x_{2\cdot 3}$	$x_{2\cdot 4}$	$P_2 = 16.63$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	48	$x_{48\cdot 1}$	$x_{48\cdot 2}$	$x_{48\cdot 3}$	$x_{48\cdot 4}$	$P_{48} = 10.63$
	Σ_m	$A_1 =$ 215.50	$A_2 =$ 195.50	$A_3 =$ 202.13	$A_4 =$ 202.00	G = 815.13

Varianzanalyse (ANOVA)

$$QS_{tot} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{G})^2$$

```
COMPUTE G.MEAN = 4,24544.
```

Berechne für jede Vp für jede Faktorstufe die quadrierte Abweichung von meanG

```
COMPUTE qAbw_xm1_G = (xm1 – G.MEAN)**2.
COMPUTE qAbw_xm2_G = (xm2 – G.mean)**2.
COMPUTE qAbw_xm3_G = (xm3 – G.mean)**2.
COMPUTE qAbw_xm4_G = (xm4 – G.mean)**2.
```

Summiere über die 4 Faktorstufen (Index i)

```
COMPUTE qAbw_xmi_G.SUM = qAbw_xm1_G + qAbw_xm2_G + qAbw_xm3_G + qAbw_xm1_G.
```

Summiere über die 48 Vpn (Index m)

```
AGGREGATE
  /OUTFILE=„aggr"
  /BREAK=
  /qAbw_xm1_G.SUM_sum=SUM(qAbw_xmi_G.SUM).
```

$QS_{tot} = 82.3848$

Varianzanalyse (ANOVA)

$$QS_{zw} = p \cdot \sum_m (\bar{P}_m - \bar{G})^2$$

Berechne für jede Vp den Mittelwert P.MEAN über Faktorstufen

```
COMPUTE P.MEAN = mean(xm1,xm2,xm3,xm4).
```

Berechne für jede Vp die quadrierte Abweichung für P.MEAN von G.MEAN

```
COMPUTE qAbw_P_G = (P.MEAN – G.MEAN)**2.
```

Summiere über die 48 Vpn (Index m)

```
AGGREGATE
  /OUTFILE='aggr'
  /BREAK=
  /qAbw_P_G_sum=SUM(qAbw_P_G).
```

Multipliziere mit 4 (= Anzahl der Faktorstufen)

```
COMPUTE QSzw = qAbw_P_G_sum * 4.
```

QS_{zw} = 62.1874

Varianzanalyse (ANOVA)

$$QS_{in} = \sum_{i} \sum_{m} (x_{mi} - \bar{P}_m)^2$$

Berechne für jede Vp die quadrierte Abweichung für xmi von P.MEAN

```
COMPUTE qAbw_xm1_P = (xm1 – P.MEAN)**2.
COMPUTE qAbw_xm2_P = (xm2 - P.MEAN)**2.
COMPUTE qAbw_xm3_P = (xm3 - P.MEAN)**2.
COMPUTE qAbw_xm4_P = (xm4 - P.MEAN)**2.
```

Summiere für jede Vp m über die 4 Faktorstufen (Index i)

```
COMPUTE qAbw_xmi_P.SUM = qAbw_xm1_P + qAbw_xm2_P + qAbw_xm3_P + qAbw_xm1_P.
```

Summiere über die 48 Vpn (Index m)

```
AGGREGATE
  /OUTFILE='aggr'
  /BREAK=
  /QSin=SUM(qAbw_xmi_P.SUM).
```

$QS_{in} = 26{,}2773$

Varianzanalyse (ANOVA)

$$QS_{treat} = n \cdot \sum_i (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

Berechne für jede Faktorstufe den Mittelwert Ai.MEAN über Vpn

```
AGGREGATE
  /OUTFILE='aggr'
  /BREAK=
  /A1_mean=MEAN(xm1)
  /A2_mean=MEAN(xm2)
  /A3_mean=MEAN(xm3)
  /A4_mean=MEAN(xm4).
```

Berechne für jede Faktorstufe die quadrierte Abweichung für Ai_mean von G.MEAN

```
COMPUTE qAbw_A1_G = (A1_mean – G.MEAN)** 2.
COMPUTE qAbw_A2_G = (A2_mean – G.MEAN)** 2.
COMPUTE qAbw_A3_G = (A3_mean – G.MEAN)** 2.
COMPUTE qAbw_A4_G = (A4_mean – G.MEAN)** 2.
```

Summiere über die 4 Faktorstufen (Index i) und multipliziere mit 48

```
COMPUTE QStreat = (qAbw_A1_G +
                   qAbw_A2_G +
                   qAbw_A3_G +
                   qAbw_A4_G +) * 48.
```

QS_{treat} = 4,4130

Varianzanalyse (ANOVA)

$$QS_{res} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{A}_i - \bar{P}_m + \bar{G})^2$$

```
COMPUTE A1.MEAN = 4.4896.
COMPUTE A2.MEAN = 4.0729.
COMPUTE A3.MEAN = 4.2109.
COMPUTE A4.MEAN = 4.2083.
```

Subtrahiere für jede Vp für jede Faktorstufe Ai.MEAN & P.MEAN, addiere G.MEAN

```
COMPUTE q_xm1_minusA_minusP_plusG = (xm1 – A1.MEAN – P.MEAN + G.MEAN)** 2.
COMPUTE q_xm2_minusA_minusP_plusG = (xm2 – A2.MEAN – P.MEAN + G.MEAN)** 2.
COMPUTE q_xm3_minusA_minusP_plusG = (xm3 – A3.MEAN – P.MEAN + G.MEAN)** 2.
COMPUTE q_xm4_minusA_minusP_plusG = (xm4 – A4.MEAN – P.MEAN + G.MEAN)** 2.
```

Summiere über die 4 Faktorstufen

```
COMPUTE q_xmi_minusA_minusP_plusG.SUM =
  q_xm1_minusA_minusP_plusG +
  q_xm2_minusA_minusP_plusG +
  q_xm2_minusA_minusP_plusG +
  q_xm2_minusA_minusP_plusG.
```

Summiere über die 48 Vpn

```
AGGREGATE
  /OUTFILE='aggr'
  /BREAK=
  /q_xmi_minusA_minusP_plusG.SUM_sum=SUM(q_xmi_minusA_minusP_plusG.SUM).
```

QS_{res} = 25,5286

Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

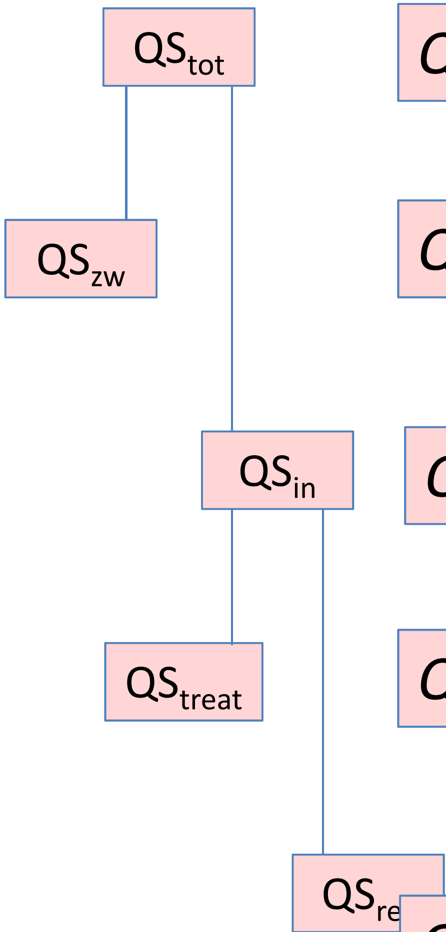
$$QS_{tot} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{G})^2$$

$$QS_{zw} = p \cdot \sum_m (\bar{P}_m - \bar{G})^2$$

$$QS_{in} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{P}_m)^2$$

$$QS_{treat} = n \cdot \sum_i (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

$$QS_{res} = \sum_i \sum_m (x_{mi} - \bar{A}_i - \bar{P}_m + \bar{G})^2$$



QS_{tot} = 82.3484

QS_{zw} = 62.1874

QS_{in} = 26,2773

QS_{treat} = 4,4130

QS_{res} = 25,5285

Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

$\sigma^2_{tot} = QS_{tot}/df_{tot} = \ldots$ QS_{tot} df = (p · n) – 1 = (4 · 48) – 1 = 191

$\sigma^2_{zw} = QS_{zw}/df_{zw} = \ldots$ QS_{zw} df = n – 1 = 48 – 1 = 47

$\sigma^2_{in} = QS_{in}/df_{in} = \ldots$ QS_{in} df = n·(p – 1) = 48 (4 – 1) = 144

$\sigma^2_{treat} = QS_{treat}/df_{treat} = \ldots$ QS_{treat} df = p – 1 = 3

$\sigma^2_{res} = QS_{res}/df_{res} = \ldots$ QS_{res} df = (n – 1) · (p – 1) = 47 · 3 = 141

Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

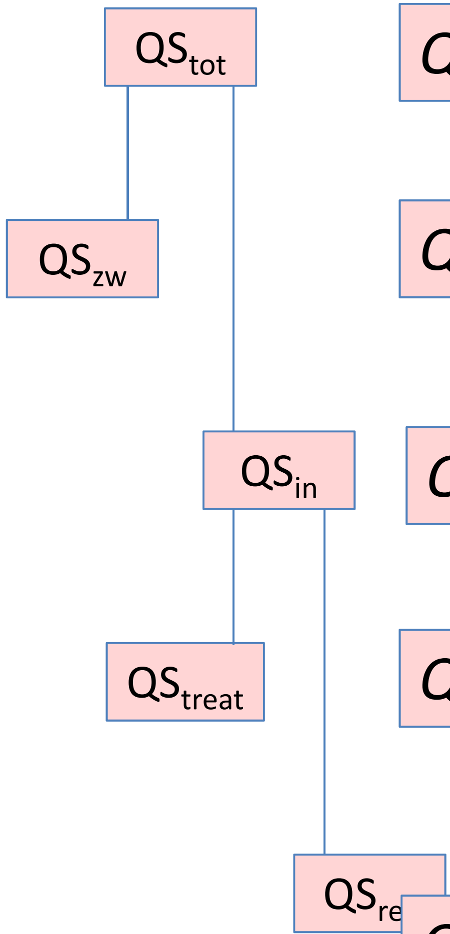
$\sigma^2_{tot} = QS_{tot}/df_{tot} = 0.4311$ — df = 191 — $QS_{tot} = 82.3484$

$\sigma^2_{zw} = QS_{zw}/df_{zw} = 1.3231$ — df = 47 — $QS_{zw} = 62.1874$

$\sigma^2_{in} = QS_{in}/df_{in} = 1.1825$ — df = 144 — $QS_{in} = 26,2773$

$\sigma^2_{treat} = QS_{treat}/df_{treat} = 1.471$ — df = 3 — $QS_{treat} = 4,4130$

$\sigma^2_{res} = QS_{res}/df_{res} = 0.1811$ — df = 141 — $QS_{res} = 25,5285$



Varianzanalyse (ANOVA)

Zerlegung der Quadratsummen: Übersicht

$\sigma^2_{tot} = QS_{tot}/df_{tot} = 0.4311$

$\sigma^2_{zw} = QS_{zw}/df_{zw} = 1.3231$

$\sigma^2_{in} = QS_{in}/df_{in} = 1.1825$

H0: $\hat{\sigma}^2_{treat} = \hat{\sigma}^2_{res}$

$\sigma^2_{treat} = QS_{treat}/df_{treat} = 1.471$

$$F(df_{treat}, df_{res}) = \frac{\hat{\sigma}^2{}_{treat}}{\hat{\sigma}^2{}_{res}} = \frac{1.471}{0.1811} = 8.12$$

$\sigma^2_{res} = QS_{res}/df_{res} = 0.1811$

Varianzanalyse (ANOVA)

Kontraste

Quelle	cond	df	Mittel der Quadrate	F(1,47)	Sig.	Partielles Eta-Quadrat
cond	L1	1	,985	1,085	,303	,023
	L2	1	8,438	19,041	,000	,288
	L3	1	8,229	25,512	,000	,352
Fehler(cond)	L1	47	,908			
	L2	47	,443			
	L3	47	,323			

Quelle	df	Mittel der Quadrate	F(1,47)	Sig.	Partielles Eta-Quadrat
Faktor1	1	,246	1,085	,303	,023
Fehler(Faktor1)	47	,227			
Faktor2	1	2,109	19,041	,000	,288
Fehler(Faktor2)	47	,111			
Faktor1 * Faktor2	1	2,057	25,512	,000	,352
Fehler(Faktor1*Faktor2)	47	,081			